LA CIRCONFERENZA NEL PIANO CARTESIANO

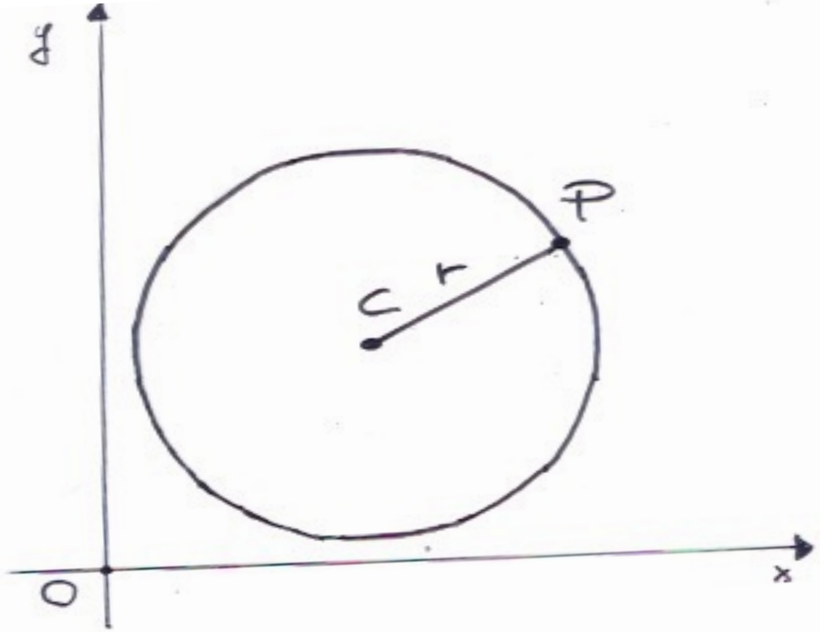
ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Monica Bagagli

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

CIRCONFERENZA

Def: Dato un punto $C(x_0; y_0)$ e un numero $r > 0$, il luogo dei punti P del piano che distano r da C si chiama CIRCONFERENZA di centro C e raggio r.



$P(x; y)$

$C(x_0; y_0)$

$\overline{CP} = r$, o anche, elevando entrambi i membri al quadrato,

$\overline{CP}^2 = r^2$ cioè

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Eq. della circonferenza dati il centro e il raggio sviluppando i quadrati:

$$x^2 + x_0^2 - 2x_0x + y^2 + y_0^2 - 2y_0y = r^2$$

da cui

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

Eq. della circonferenza in forma normale

con $a = -2x_0$

$b = -2y_0$

$c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.

il centro C si ricava da

$$\begin{cases} a = -2x_0 \\ b = -2y_0 \end{cases} \rightarrow \quad x_0 = -\frac{a}{2} \qquad y_0 = -\frac{b}{2}$$

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

il raggio r si ricava da

$$c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 :$$

$$r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$$

$$r^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

OSSERVAZIONE:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

rappresenta la circonferenza di

centro $C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ e raggio

$r=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$ purché

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$$

ossia $a^2+b^2>4c$

ESEMPI

① L'equazione $x^2+y^2-2x+4y+10=0$

NON rappresenta una circonferenza

in quanto $r=\sqrt{1+4-10}=\underline{\sqrt{-5}}$

non ha significato.

② L'equazione $x^2+y^2+\underline{xy}-x+4=0$

NON rappresenta una circonferenza

in quanto c'è il termine xy.

③ L'equazione $\underline{x^2}+\underline{3}y^2-4x+2y-1=0$

NON rappresenta una circonferenza

in quanto i coefficienti di x^2 e y^2

sono diversi.

ESEMPIO

la circonferenza di centro $C(2;0)$

e raggio $r=1$ ha equazione

$$(x-2)^2+y^2=1$$

cioè

$$x^2+y^2-4x+3=0$$

ESERCIZIO

Stabilire se l'equazione

$$x^2+y^2-2x-4y+5=0$$

rappresenta una circonferenza.

$a=-2$

$b=-4$

$c=5$

$$a^2+b^2>4c$$

$4+16>20$ Falso

$r=\sqrt{1+4-5}=0$ $C(1;2)$

Si tratta della circonferenza di raggio nullo (circonferenza degenere)

Esercizio: Determinare il centro e il raggio della circonferenza di equazione

$$5x^2+5y^2-3x+10y-3=0$$

$$\frac{5x^2+5y^2-3x+10y-3}{5}=\frac{0}{5}$$

$$x^2+y^2-\frac{3}{5}x+2y-\frac{3}{5}=0$$

$$C\left(-\frac{-\frac{3}{5}}{2},-\frac{2}{2}\right)\longrightarrow C\left(\frac{3}{10},-1\right)$$

$$r=\sqrt{\frac{9}{100}+1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\sqrt{\frac{169}{100}}=\frac{13}{10}$$

ESERCIZIO

Determinare centro e raggio della circonferenza di equazione:

$$x^2+y^2+2x+4y+1=0.$$

$a=2$
$b=4$
$c=1$

Quindi,

$$C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) \longrightarrow C(-1;-2)$$

$$r=\sqrt{x_0^2+y_0^2-c}$$
$$=\sqrt{1+4-1}$$
$$=\sqrt{4}$$
$$=2$$

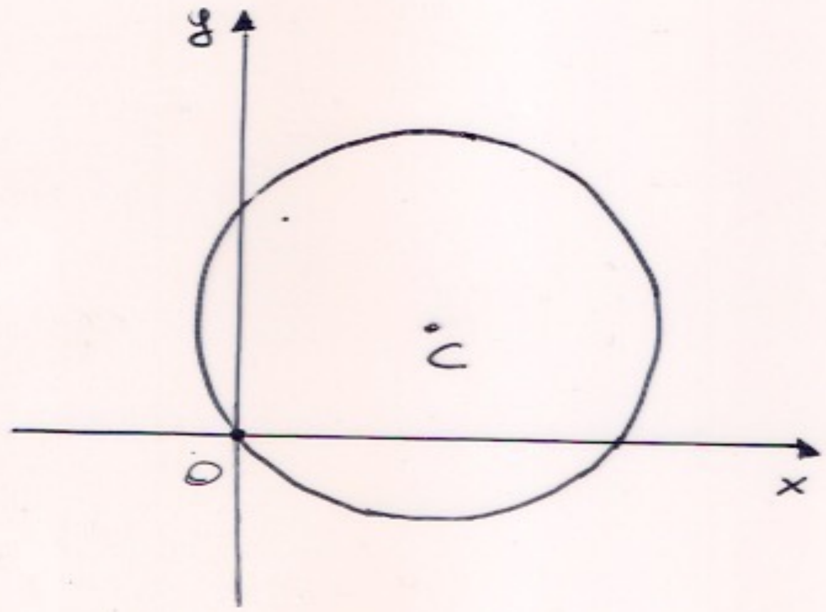
CIRCONFERENZE IN POSIZIONI PARTICOLARI

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

- Se $c = 0$

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

Passa per l'origine $O(0;0)$

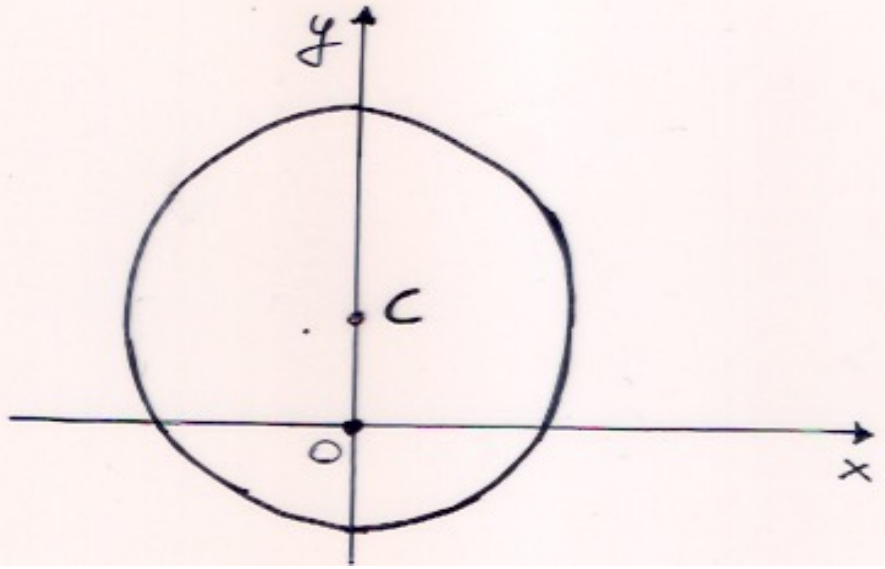


- Se $a = 0$

$$x^2 + y^2 + by + c = 0$$

$$C\left(0\,;\,-\frac{b}{2}\right)$$

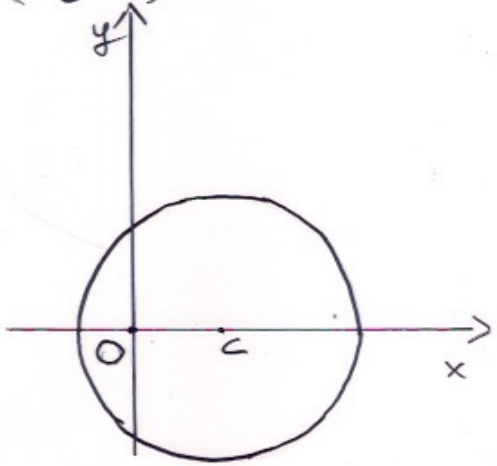
il centro è sull'asse y.



• Se $b=0$

$$x^2+y^2+ax+c=0$$

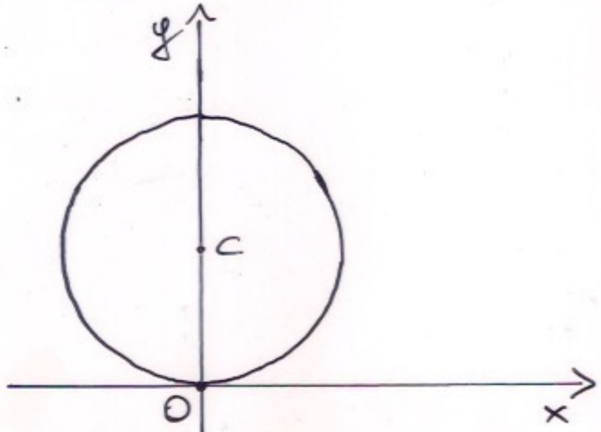
$C\left(-\frac{a}{2},0\right)$ sull'asse x



• Se $a=c=0$

$$x^2+y^2+by=0$$

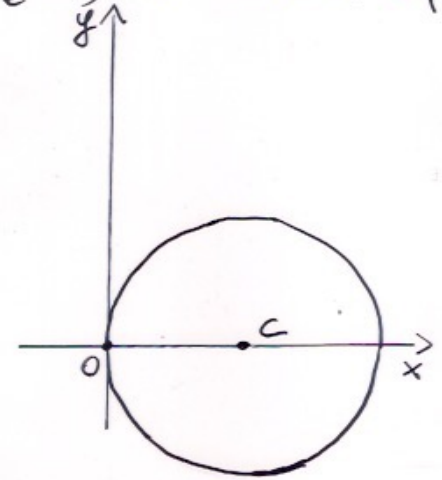
con $C\left(0,-\frac{b}{2}\right)$ sull'asse y e passante per $O(0,0)$



- Se $b=c=0$

$$x^2+y^2+ax=0$$

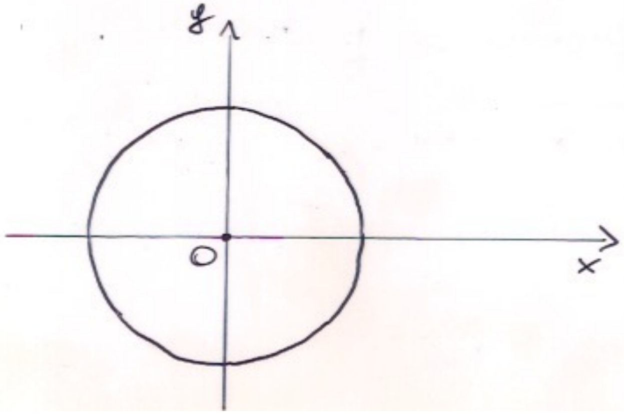
con $C\left(-\frac{a}{2},0\right)$ sull'asse x e passante per $O(0,0)$



- Se $a=b=0$

$$x^2+y^2+c=0 \qquad (x^2+y^2=r^2)$$

con $C(0,0)$



ESEMPI:

- $4x^2 + 4y^2 = 25$ $\qquad a = b = 0$

  $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

  Centro nell'origine e raggio $r = \frac{5}{2}$

- $x^2 + y^2 + 8x = 0$ $\qquad b = c = 0$

  Centro sull'asse x e passante per $O(0,0)$

  $C(-4,0)$ $\qquad r = \sqrt{16+0-0} = 4$

- $x^2 + y^2 + 8y = 0$ $\qquad a = c = 0$

  Centro sull'asse y e passante per $O(0,0)$

  $C(0,-4)$ $\qquad r = \sqrt{0+16-0} = 4$

ESERCIZI:

1) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(-2, 1) e raggio r=5

2) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(-3, 2) e passante per l'origine

3) Scrivere l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi A(-2, 0) e B(8,4)

4) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(2, 3) e passante per B(-1, 6)

5) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(2, -1) e raggio r=4

6) Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(2, -3) e passante per P(-1, 2)

7) Scrivere l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio r= $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

1)

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(-2;1)$ e raggio $r=5$.

Applicando

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

si ottiene:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25.$$

Sviluppando:

$$x^2+4+4x+y^2+1-2y=25$$

e riducendo:

$$x^2+y^2+4x-2y-20=0$$

2)

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(-3;2)$ e passante per $O(0;0)$.

$$x^2+y^2+ax+by=0 \qquad (c=0)$$

$$a=-2x_0 \longrightarrow a=-2(-3)=6$$
$$b=-2y_0 \longrightarrow b=-2(2)=-4$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+6x-4y=0$$

Oppure:

$$r = \overline{OC} = \sqrt{(-3-0)^2+(2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2 = 13$$

$$x^2+9+6x+y^2+4-4y-13=0$$

$$x^2+y^2+6x-4y=0$$

3)

Esercizio: Scrivere l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi $A(-2,0)$ e $B(8,4)$:

Il centro C è il punto medio del segmento AB $\Rightarrow$

$$x_0 = \frac{-2+8}{2} = 3$$
$$y_0 = \frac{0+4}{2} = 2 \qquad \Rightarrow C(3,2)$$

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(3+2)^2+(2-0)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2 = 29$$

sviluppando i quadrati:

$$x^2+9-6x+y^2+4-4y-29=0$$

$$x^2+y^2-6x-4y-16=0$$

4)

Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C(2;3)$ e passante per $B(-1;6)$.

$$r = \overline{CB} = \sqrt{(2+1)^2+(3-6)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}.$$

L'equazione cercata è:

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 18$$

ossia, sviluppando:

$$x^2+4-4x+y^2+9-6y=18$$

e riducendo:

$$x^2+y^2-4x-6y-5=0.$$

Oppure:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\begin{cases} a=-2\cdot(2) \\ b=-2\cdot(3) \\ (-1)^2+(6)^2+a\cdot(-1)+b\cdot(6)+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-6 \\ 1+36-a+6b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-6 \\ 1+\cancel{36}+4-\cancel{36}+c=0 \rightarrow c=-5 \end{cases}$$

Quindi:

$$x^2+y^2-4x-6y-5=0$$

5)

Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(2;-1)$ e raggio $r=4$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=16$$

$$x^2+4-4x+y^2+1+2y-16=0$$

$$x^2+y^2-4x+2y-11=0$$

Risposta: $x^2+y^2-4x+2y-11=0$

6)

Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(2;-3)$ e passante per $P(-1;2)$

$r=\overline{CP} \rightarrow r^2=\overline{CP}^2$

$\overline{CP}^2=(2+1)^2+(-3-2)^2$

$=3^2+(-5)^2$

$=9+25$

$=34$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$\rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=34$

$x^2+4-4x+y^2+9+6y=34$

$x^2+y^2-4x+6y-21=0$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

7)

Prova finale 22.09.2011

Determinare l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio $r = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Quindi:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{16 \cdot 5}{9}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{80}{9}$$