ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO
(seconda parte)

Monica Bagagli

PRECORSO DI MATEMATICA GENERALE CLET E CLEI

SCOMPOSIZIONE MEDIANTE IL TEOREMA E LA REGOLA DI RUFFINI

TEOREMA DI RUFFINI

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $(x-a)$ se e solo se $P(a)=0$.

N.B.

Il valore a che annulla il polinomio $P(x)$ si dice zero del polinomio.

Divisibilità tra polinomi

Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un polinomio $B(x)$ se esiste un polinomio $Q(x)$ che, moltiplicato per $B(x)$, dà come prodotto $P(x)$.

$$P(x) : B(x) = Q(x)$$

se e solo se

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

Se a è uno zero di $P(x)$ allora $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$, quindi si può scomporre nella forma:

$$P(x)=(x-a)\cdot Q(x)$$

Dove $Q(x)$ è un polinomio che ha il grado di $P(x)$ diminuito di 1

Esempio:

$$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$$

1 è uno zero di P(x):

$$P(1)=(1)^3-6(1)^2+11(1)-6$$
$$=1-6+11-6$$
$$=0$$

Quindi $P(x)=(x-1)Q(x)$

dove Q(x) ha grado 2

Zeri interi di un polinomio

Se un numero intero annulla un polinomio a coefficienti interi , allora esso è divisore del termine noto.

Zeri razionali di un polinomio

Se la frazione ridotta ai minimi termini $\frac{m}{n}$ annulla il polinomio a coefficienti interi,

allora m è un divisore intero del termine noto e

n è un divisore intero del coefficiente del termine di grado massimo.

Primo caso: il coefficiente del termine di grado massimo è 1

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6=0$$

Gli eventuali zeri interi vanno cercati tra i divisori del termine noto.

Termine noto: -6

Possibili zeri: ± 1; ± 2; ±3; ±6

1 è uno zero di P(x)

Infatti:

$$P(1)= (1)^3-6(1)^2 + 11(1) - 6$$
$$= 1 - 6+11 - 6$$
$$= 0$$

Quindi: P(x)=(x-1)·Q(x)

Termine noto

zero

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	//

Q(x)= $x^2 - 5x + 6$

P(x)=(x-1)$\cdot(x^2 - 5x + 6)$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6=0$$

$$(x-1)\cdot(x^2 - 5x + 6)=0$$

$x-1=0$ $\vee$ $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x=1$

$$\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm1}{2} =$$

2

3

$S=\{1,2,3\}$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
CAMPUS DI RIMINI

Secondo caso: il coefficiente del termine di grado massimo è diverso da 1

$$12x^3 - 8x^2 - x + 1=0$$

Gli eventuali zeri razionali vanno cercati tra i divisori del termine noto e tra le frazioni:

$$\pm \frac{divisori\ del\ termine\ noto}{divisori\ del\ coefficiente\ del\ termine\ di\ grado\ max}$$

Termine noto: 1

Coefficiente del termine di grado max: 12

Possibili zeri interi: ± 1

Possibili zeri razionali: $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{3}$; $\pm \frac{1}{4}$; $\pm \frac{1}{6}$; $\pm \frac{1}{12}$

$P(1) \neq 0$

$P(-1) \neq 0$

$P(\frac{1}{2}) = 0$

Termine noto

zero

	12	-8	-1	1
$\frac{1}{2}$		6	-1	-1
	12	-2	-2	//

$Q(x) = 12x^2 - 2x - 2$

$\Rightarrow$ P(x)=$(x-\frac{1}{2})\cdot(12x^2-2x-2)$

Quindi:

$(x-\frac{1}{2})\cdot(12x^2-2x-2)=0$

$(x-\frac{1}{2})=0$ $\quad\vee\quad$ $12x^2-2x-2=0$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\Downarrow$

X= $\frac{1}{2}$

$6x^2-x-1=0$

$\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm5}{12}=$ $\nearrow \frac{1}{2}$ $\searrow -\frac{1}{3}$

S=$\{-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\}$

OSSERVAZIONE:

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1=0$$

$$(2x - 1)^3=0$$

2x-1=0

$$X= \frac{1}{2}$$

$$S=\{\frac{1}{2}\}$$

ESERCIZI:

1. $x^3-8x^2+17x-10=0$
2. $x^3+x^2-2=0$
3. $x^3-3x^2-2x+4=0$
4. $\dfrac{x^4-x^3}{2}=4(x-1)$
5. $x^3-3x-2=0$
6. $x^3+2x^2+x+2=0$

1)

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$$

termine noto: -10

possibili zeri: ± 1; ± 2; ± 5; ± 10

1 è uno zero di $P(x)$

$$P(1) = (1)^3 - 8\cdot(1)^2 + 17(1) - 10$$
$$= 1 - 8 + 17 - 10$$
$$= 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -8 & 17 & -10 \\
 & & & & \\
1 & & 1 & -7 & 10 \\
\hline
 & 1 & -7 & 10 & //
\end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 7x + 10)$$

Quindi:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 7x + 10) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 1 \qquad x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

$$S = \{1, 2, 5\}$$

2)

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

Termine noto: -2

coeff. del termine
di grado max: 1

possibili zeri interi: $\pm 1; \pm 2$

1 è uno zero di $P(x)$

$$P(1) = (1)^3 + (1)^2 - 2$$
$$= 1 + 1 - 2$$
$$= 0$$

	1	1	0	−2
1		1	2	2
	1	2	2	//

$$P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$$

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

$$(x-1)(x^2+2x+2) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -1 \pm \sqrt{1-2}$$

$$\Delta < 0$$

<u>IMPOSSIBILE</u>

$$S = \{1\}$$

③ $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$ Prova finale 2015

possibili zeri: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$P(1) = 1 - 3 - 2 + 4 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -3 & -2 & 4 \\
 & & & & \\
1 & & 1 & -2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & -4 & //
\end{array}
$$

$\rightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0$

$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$x = 1 \qquad\qquad x = 1 \pm \sqrt{1+4}$

$S = \{1, \ 1 \pm \sqrt{5}\}$

4)

Risolvere la seguente equazione:

$$\frac{x^4 - x^3}{2} = 4(x-1)$$

$$x^4 - x^3 = 8x - 8$$

$$x^4 - x^3 - 8x + 8 = 0$$

$$x^3(x-1) - 8(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^3-8) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x^2+4+2x) = 0$$

$$x-1=0 \quad \vee \quad x-2=0 \quad \vee \quad x^2+2x+4=0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x=1 \qquad\qquad x=2 \qquad\qquad x=-1\pm\sqrt{1-4}$$

$\Delta<0$

Eq. impossibile

$$S=\{1,2\}$$

5)

3) $x^3 - 3x - 2 = 0$

possibili zeri : $\pm 1;\ \pm 2$

$P(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) - 2$

$= -1 + 3 - 2$

$= 0$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -3 & -2 \\
 & & & & \\
-1 & & -1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & //
\end{array}
$$

$Q(x) = x^2 - x - 2$

$\Rightarrow \quad x^3 - 3x - 2 = 0$

$(x+1)(x^2 - x - 2) = 0$

$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - x - 2 = 0$

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$x = -1 \qquad\qquad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$= \dfrac{1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow 2 \end{array}$

$S = \{-1, 2\}$

6)

$$x^3+2x^2+x+2=0$$

$$x^2(x+2)+(x+2)=0$$

$$(x+2)(x^2+1)=0$$

$$x+2=0 \quad \vee \quad x^2+1=0$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x=-2 \qquad\qquad x^2=-1 \ \text{IMP.}$$

$$S=\{-2\}$$