SOLUZIONI ESERCIZI ALGEBRA

1) $\dfrac{x^2-4y^2}{2x-4y}=\dfrac{(x-2y)(x+2y)}{2(x-2y)}=\dfrac{x+2y}{2}$

2) $\dfrac{4x^2-1}{6x+3}=\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3(2x+1)}=\dfrac{2x-1}{3}$

3) $\dfrac{25x^2-9y^2}{10x^2-6xy}=\dfrac{(5x-3y)(5x+3y)}{2x(5x-3y)}=\dfrac{5x+3y}{2x}$

4) $\dfrac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}=\dfrac{(3x-1)^2}{(3x-1)(3x+1)}=\dfrac{3x-1}{3x+1}$

5) $\dfrac{-4x^2+4x-1}{4x^2-1}=\dfrac{-(4x^2-4x+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\dfrac{-(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-1)}=\dfrac{-(2x-1)}{2x+1}=\dfrac{1-2x}{2x+1}$

6) $\dfrac{x^3+8y^3}{4xy-2x^2-8y^2}=\dfrac{x^3+(2y)^3}{-2(x^2-2xy+4y^2)}=$

Nota bene: il trinomio tra parentesi è un falso quadrato e il numeratore è la somma di due cubi!!

Riprendiamo:

$$=\frac{(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)}{-2(x^2-2xy+4y^2)}=-\frac{x+2y}{2}=\frac{-x-2y}{2}$$

7) $\dfrac{x^2+x^4}{x^4-1}=\dfrac{x^2(1+x^2)}{(x^2+1)(x^2-1)}=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

8) $\dfrac{x^6-y^6}{x^4-y^4}=\dfrac{(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}=$

$$=\frac{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2}$$

9) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}=\dfrac{x^2(x-1)+x-1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=$

$$=\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{x+1}$$

10) $(x-2y)^3+3y(x-2y)^2+3y^2(x-2y)+y^3=$

questo esercizio si risolve facilmente ricordando la regola dello sviluppo del cubo di un binomio

$=[(x-2y)+y]^3=$

$=[x-2y+y]^3=$

$= [x - y]^3$

11) $x^3 + 3x(x-2y)^2 - 3x^2(x-2y) - (x-2y)^3 =$

questo esercizio si risolve in maniera analoga al precedente (attenzione ai segni!)

$= [x - (x-2y)]^3 =$

$= [x - x + 2y]^3 =$

$= 8y^3$

12) $16x^2 - 16xy^3 + 4y^6 =$

questo esercizio si risolve notando che questo trinomio è un quadrato di un binomio

$= (4x - 2y^3)^2$

13) $9z^2 - 4x^2 + 4xy - y^2 =$

$= 9z^2 - (4x^2 - 4xy + y^2) =$

$= 9z^2 - (2x - y)^2 =$

notando che quest'ultima espressione è la differenza tra due quadrati possiamo scrivere

$= [3z - (2x - y)] \cdot [3z + (2x - y)] =$

$= [3z - 2x + y] \cdot [3z + 2x - y]$

14) $ax^2 - a - bx^2 + b =$

$= a(x^2 - 1) - b(x^2 - 1) =$

$= (x^2 - 1)(a - b) =$

$= (x + 1)(x - 1)(a - b)$

15) $x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3 =$

$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 2xy(x^2 - y^2) =$

$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 2xy) =$

$= (x - y)(x + y)(x + y)^2 =$

$= (x - y)(x + y)^3$

16) $\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{2}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{3x-2-x^2}{2x^2+10}=$

$=\frac{(x+1)^2-2(x-2)}{(x-2)(x+1)}\frac{x(x-1)+(x-1)-x(x+1)}{x(x-1)}\frac{3x-2-x^2}{2(x^2+5)}=$

$=\frac{x^2+2x+1-2x+4}{(x-2)(x+1)}\frac{x^2-x+x-1-x^2-x}{x(x-1)}\frac{3x-2-x^2}{2(x^2+5)}=$

$=\frac{x^2+5}{(x-2)(x+1)}\frac{-(x+1)}{x(x-1)}\frac{3x-2-x^2}{2(x^2+5)}=$

$=\frac{1}{(x-2)}\frac{-1}{x(x-1)}\frac{3x-2-x^2}{2}=$

$=\frac{x^2-3x+2}{2x(x-2)(x-1)}=$

$=\frac{x^2-3x+2}{2x(x^2-x-2x+2)}=$

$=\frac{x^2-3x+2}{2x(x^2-3x+2)}=$

$=\frac{1}{2x}$

17) $\dfrac{x^4-1}{x^3+x^2}\dfrac{x}{x^3-x^2+x-1}\dfrac{1-x^2}{1-x}=$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2\left(x+1\right)}\frac{x}{x^2\left(x-1\right)+\left(x-1\right)}\frac{\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{1-x}=$$

$$=\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2\left(x+1\right)}\frac{x}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}\frac{\left(1-x\right)\left(1+x\right)}{1-x}=$$

semplificando tutto il possibile si ottiene

$$=\frac{x+1}{x}$$

18) $\left(\frac{x}{x^2+2x+1}+\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=$

$$=\left(\frac{x}{(x+1)^2}+\frac{x}{(x-1)^2}-\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\right)\frac{x^4-1}{x^2}\frac{1-x^2}{x}=$$

$$=\frac{x(x-1)^2+x(x+1)^2-2x(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)^2}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2}\frac{1-x^2}{x}=$$

$$=\frac{x\left[(x-1)^2+(x+1)^2-2(x-1)(x+1)\right]}{(x+1)^2(x-1)^2}\frac{(x^2+1)(x-1)(x+1)}{x^2}\frac{(1-x)(1+x)}{x}=$$

dopo aver semplificato ciò che è immediatamente visibile si ottiene

$$=\frac{\left[(x-1)^2+(x+1)^2-2(x-1)(x+1)\right](x^2+1)}{x^2}\cdot(-1)=$$

dopo aver notato che il termine tra parentesi quadre è un quadrato possiamo scrivere

$$=\frac{\left[(x-1)-(x+1)\right]^2(x^2+1)}{x^2}\cdot(-1)=$$

$$=\frac{\left[x-1-x-1\right]^2(x^2+1)}{x^2}\cdot(-1)=$$

$$=\frac{\left[-2\right]^2(x^2+1)}{x^2}\cdot(-1)=$$

$$=\frac{4(x^2+1)}{x^2}\cdot(-1)=$$

$$=-\frac{4(x^2+1)}{x^2}.$$

19) $\left(x^2+2x+1-\dfrac{1}{x^2-2x+1}\right):\left(\dfrac{x}{x-1}+x\right)=$

$$=\left((x+1)^2-\frac{1}{(x-1)^2}\right):\left(\frac{x+x(x-1)}{x-1}\right)=$$

$$=\frac{(x+1)^2(x-1)^2-1}{(x-1)^2}:\left(\frac{x+x^2-x}{x-1}\right)=$$

ribalto il secondo termine e la divisione diventa espressa come prodotto

$$=\frac{(x+1)^2(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{(x+1)^2(x-1)^2-1}{x^2(x-1)}=$$

$$=\frac{[(x+1)(x-1)]^2-1}{x^2(x-1)}=$$

poiché il numeratore è la differenza di due quadrati posso anche scrivere (ricordare i prodotti notevoli!)

$$=\frac{[(x+1)(x-1)-1]\cdot[(x+1)(x-1)+1]}{x^2(x-1)}=$$

$$=\frac{[x^2-1-1]\cdot[x^2-1+1]}{x^2(x-1)}=$$

$$=\frac{[x^2-2]\cdot x^2}{x^2(x-1)}=$$

$$=\frac{x^2-2}{x-1}$$

20) $\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)+\frac{10}{1-4x^2}=$

$=\frac{(2x+1)(x+2)-(x-2)(2x-1)}{(2x-1)(x+2)}\cdot\frac{x+2}{x}-\frac{10}{4x^2-1}=$

$=\frac{(2x+1)(x+2)-(x-2)(2x-1)}{x(2x-1)}-\frac{10}{(2x-1)(2x+1)}=$

$=\frac{(2x+1)^2(x+2)-(x-2)(2x-1)(2x+1)-10x}{x(2x-1)(2x+1)}=$

$=\frac{(4x^2+4x+1)(x+2)-(x-2)(4x^2-1)-10x}{x(2x-1)(2x+1)}=$

$=\frac{4x^3+4x^2+x+8x^2+8x+2-(4x^3-x-8x^2+2)-10x}{x(2x-1)(2x+1)}=$

$=\frac{4x^3+4x^2+x+8x^2+8x+2-4x^3+x+8x^2-2-10x}{x(2x-1)(2x+1)}=$

$=\frac{20x^2}{x(2x-1)(2x+1)}=$

$=\frac{20x}{(2x-1)(2x+1)}=$

$=\frac{20x}{4x^2-1}.$

21) $3x-[2-3(x+5)]-4(2x+3)=9(x-4)+4$

$$3x-[2-3x-15]-8x-12-9(x-4)=4$$

$$3x-2+3x+15-8x-12-9x+36=4$$

$$-11x+37=4$$

$$-11x=4-37$$

$$-11x=-33$$

$$-\frac{1}{11}(-11x)=-\frac{1}{11}(-33)$$

Risultato: $x=3$

22) $\frac{x+3}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x$

$$\frac{x+3}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=0$$

$$\frac{x+3+3-3x+2x}{6}=0$$

$$\frac{6}{6}=0$$

$$1=0$$

Risultato: IMPOSSIBILE

23) $2(x+5)=2(x-1)+12$

$$2(x+5)-2(x-1)-12=0$$

$$2x+10-2x+2-12=0$$

$$0=0$$

Risultato: IDENTITA’

24) $3\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}x\right)+3\left(\frac{1}{3}x-1\right)-\frac{x-1}{3}\right]=4$

$$\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x+x-3-\frac{x-1}{3}\right]=\frac{4}{3}$$

$$\frac{3x-x+6x-18-2x+2}{6}=\frac{8}{6}$$

$$3x-x+6x-18-2x+2=8$$

$$6x-16=8$$

$$6x = 24$$

Risultato: $x = 4$

25) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)-x\left(x+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}(x-2)$

$$x^2-\frac{1}{9}-x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}x=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{-2-3x-6x}{18}=-\frac{12}{18}$$

$$-9x=-10$$

Risultato: $x=\frac{10}{9}$

26) $\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x^2+\frac{9}{4}\right)=\left(x^2-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{9}{2}x(2-x)$

$$\left(x^2-\frac{9}{4}\right)\left(x^2+\frac{9}{4}\right)-\left(x^2-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{9}{2}x(2-x)=0$$

$$x^4-\frac{81}{16}-\left(x^4-\frac{9}{2}x^2+\frac{81}{16}\right)+9x-\frac{9}{2}x^2=0$$

$$x^4-\frac{81}{16}-x^4+\frac{9}{2}x^2-\frac{81}{16}+9x-\frac{9}{2}x^2=0$$

$$-\frac{81}{8}+9x=0$$

$$9x=\frac{81}{8}$$

Risultato: $x=\frac{9}{8}$

27) $(x-3)^3+9x(x-3)=x(x+3)(x-3)$

$$(x-3)^3+9x(x-3)-x(x+3)(x-3)=0$$

$$(x-3)\left[(x-3)^2+9x-x(x+3)\right]=0$$

$$(x-3)\left[x^2-6x+9+9x-x^2-3x\right]=0$$

$$9(x-3)=0$$

$$x-3=0$$

Risultato: $x=3$

28) $\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{6+7x}{9}=\dfrac{8}{9}-\dfrac{5x+5}{6}$

$$\frac{x-1}{3}+\frac{6+7x}{9}+\frac{5x+5}{6}=\frac{8}{9}$$

$$\frac{6(x-1)+2(6+7x)+3(5x+5)}{18}=\frac{16}{18}$$

$$6(x-1)+2(6+7x)+3(5x+5)=16$$

$$6x-6+12+14x+15x+15=16$$

$$35x+21=16$$

$$35x=-5$$

Risultato: $x=-\dfrac{1}{7}$

29) $3(x-1)+2x>x+5$

$$3x-3+2x-x>5$$

$$4x>8$$

Risultato: $x>2$

30) $x-2(x-1)<3(x+1)-2$

$$x-2x+2-3x-3<-2$$

$$-4x<-1$$

Moltiplico entrambi i membri per (-1) e cambio il verso della diseguaglianza

$$4x>1$$

Risultato: $x>\dfrac{1}{4}$

31) $\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{6}(2x-1)<3+\dfrac{1}{4}(7x+2)$

$$\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}-\frac{7x}{4}-\frac{1}{2}<3$$

$$\frac{30x-4x+2-21x-6}{12}<\frac{36}{12}$$

$$5x<40$$

Risultato: $x<8$

32) $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)\geq 3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$

$$6\left(\frac{2(x+1)-2x+3}{16}\right)\geq\frac{12(3x-1)-6(3x-2)}{16}$$

$$6(2x+2-2x+3)\geq 36x-12-18x+12$$

$$30\geq 18x$$

$$-18x\geq -30$$

$$18x\leq 30$$

Risultato: $x\leq\frac{5}{3}$

33) $x(x-3)=0$

Applicando la legge di annullamento del prodotto le soluzione si ottengono uguagliando a zero i due fattori: $x=0$ e $x-3=0$

Risultato:(0; 3)

34) $11(x+1)(x-3)=0$

$$(x+1)(x-3)=0$$

Le soluzioni si ottengono uguagliando a zero i due fattori e risolvendo le relative equazioni di primo grado: $x+1=0$ e $x-3=0$

Risultato: (-1; 3)

35) $x^2-81=0$

$(x-9)(x+9)=0$ oppure semplicemente $x^2=81$ e $x=(+/-)\sqrt{81}=(+/-)9$

Risultato: (-9; 9)

36) $4x^2-25=0$

$$(2x-5)(2x+5)=0$$

Risultato: (-5/2; 5/2)

37) $x^2+1=0$

Risultato: non ha radici reali $x^2\neq -1$

38) $x^2-3x+2=0$

Applichiamo direttamente la formula risolutiva (poteva essere utilizzata anche nei casi precedenti)

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Risultato: (2; 1)

39) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

Risultato: (-1; -3)

40) $x^2 + 3x + 3 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Risultato: non ci sono radici reali (nell'insieme dei numeri reali la radice quadrata di u numero negativo non esiste). Nota: l'equazione ha due radici *complesse coniugate* ed la lettera *i* è detta unità immaginaria. Ma a noi non interessa. Se vi capita nel compito una situazione di questo tipo scrivete che l'equazione non presenta radici reali.

41) $(2x-3)^2 = (x+1)^2$

$$4x^2 - 12x + 9 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$3x^2 - 14x + 8 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-96}}{6} = \frac{14 \pm 10}{6}$$

Risultato: (2/3; 4)

42) $2x^2 - 2\sqrt{2}x - 3 = 0$

$$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+24}}{4} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{32}}{4} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{2^5}}{4} = \frac{2\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{4}$$

Risultato: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2})$

43) $7x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-28}}{14} = \frac{-2 \pm \sqrt{-24}}{14} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{6}}{14} = \frac{-1 \pm i\sqrt{6}}{7}$$

Risultati: l'equazione non ha radici reali

44) $\frac{1}{4}(x-8)^2+\frac{1}{3}(x-7)=2$

$$\frac{1}{4}\left(x^2-16x+64\right)+\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}-2=0$$

$$\frac{1}{4}x^2-4x+14+\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}=0$$

$$\frac{1}{4}x^2+\frac{1-12}{3}x+\frac{42-7}{3}=0$$

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{11}{3}x+\frac{35}{3}=0$$

$$x=\frac{\frac{11}{3}\pm\sqrt{\frac{121-105}{9}}}{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{11}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}}\right)=2\left(\frac{11}{3}\pm\frac{4}{3}\right)$$

Risultato: (10; 14/3)

45) $(x+2)^2=3x-1$

$$x^2+4x+4-3x+1=0$$

$$x^2+x+5=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{19}}{2}$$

Risultato: non ci sono radici reali

46) $\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{18}{5}x-1$

$$\frac{9}{25}x^2+\frac{12}{15}x+\frac{4}{9}-\frac{18}{5}x+1=0$$

$$\frac{9}{25}x^2-\frac{14}{5}x+\frac{13}{9}=0$$

$$\frac{81}{225}x^2-\frac{630}{225}x+\frac{325}{225}=0$$

$$81x^2-630x+325=0$$

$$x=\frac{630\pm\sqrt{396900-105300}}{162}=\frac{630\pm540}{162}=\frac{35\pm30}{9}$$

Risultato: (65/9; 5/9).

47) $x^2-4x<0$

Le radici dell'equazione associata sono 0 e 4.

Risultato: $0<x<4$

48) $9-x^2<0$

$x^2-9>0$

Le radici dell'equazione associata sono -3 e 3.

Risultato: $x<-3$ e $x>3$

49) $x^2-16\geq 0$

Le radici dell'equazione associata sono -4 e 4.

Risultato: $x\leq -4$ e $x\geq 4$.

50) $3x^2-5x+2\leq 0$

Le radici dell'equazione associata sono 2/3 e 1.

Risultato: $\frac{2}{3}\leq x\leq 1$

51) $2-2(2x-1)+4x^2-3<0$

$4x^2-4x+1<0$

Le radici dell'equazione associata sono coincidenti: 1/2.

Risultato: mai verificata

52) $4x^2-4x+1>0$

Le radici dell'equazione associata sono coincidenti: 1/2.

Risultato: $x\in R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

53) $4x^2-4x+1\geq 0$

Le radici dell'equazione associata sono coincidenti: 1/2.

Risultato: $x \in R$

54) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

Le radici dell'equazione associata sono coincidenti: 1/2.

Risultato: è verificata solo per $x = \frac{1}{2}$

55) $(x+4)^2 - \frac{x-1}{3} + 8 < 0$

$$x^2 + 8x + 16 - \frac{x-1}{3} + 8 < 0$$

$$\frac{3x^2 + 24x + 48 - x + 1 + 24}{3} < 0$$

$$3x^2 + 23x + 73 < 0$$

Il delta è negativo: non ci sono radici reali.

Risultato: mai verificata

56) $3x^2 + 23x + 73 \geq 0$

Il delta è negativo: non ci sono radici reali.

Risultato: $x \in R$

- **Equazioni e disequazioni di razionali fratte**

57) $\frac{1}{x-2} = 1$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2}$$

Moltiplichiamo entrambi per $x - 2$ imponendo la condizione $x \neq 2$

$$1 = x - 2$$

Risultato: $x = 3$

58) $\frac{12x-4}{12x+79} = 0$

Moltiplichiamo entrambi per $12x - 79$ e poniamo la condizione $x \neq \pm 79/12$

$$12x - 4 = 0$$

Risultato: $x = 1/3$

59) $\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{16}{2x+3}$

$$\frac{4}{x+1}-\frac{16}{2x+3}=0$$

$$\frac{4(2x+3)-16(x+1)}{(x+1)(2x+3)}=0$$

Moltiplichiamo entrambi per $(x+1)(2x+3)$ imponendo la condizione $x \neq -1$ e $x \neq -3/2$

$$4(2x+3)-16(x+1)=0$$

$$8x+12-16x-16=0$$

$$-8x-4=0$$

$$2x+1=0$$

Risultato: $x=-1/2$

60) $\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{5}{x-2}$

Moltiplichiamo entrambi per $x-2$ imponendo la condizione $x \neq 2$

$$x+3=5$$

$$x=2$$

Risultato: IMPOSSIBILE (vedi la condizione $x \neq 2$)

61) $\dfrac{x}{1-x^2}=\dfrac{1}{2+2x}+\dfrac{1}{4-4x}$

$$\frac{x}{(1-x)(1+x)}-\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{4(1-x)}=0$$

$$\frac{4x-2(1-x)-1(1+x)}{4(1-x)(1+x)}=0$$

Condizione $x \neq \pm 1$

$$4x-2(1-x)-(1+x)=0$$

$$4x-2+2x-1-x=0$$

$$5x-3=0$$

Risultato: $x=3/5$

62) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}=0$$

$$\frac{(x-1)^2-(x-2)(x+2)-x-1}{(x-2)(x-1)}=0$$

Condizioni $x \neq 1$ e $x \neq 2$

$$(x-1)^2-(x-2)(x+2)-x-1=0$$

$$x^2-2x+1-x^2+4-x-1=0$$

$$-3x+4=0$$

Risultato: $x=4/3$

63) $\dfrac{x-1}{x-2} \geq 0$

________________1__________2________________

Segno $x-1$ ----------------------●++++++++++++++++++++++++

Segno $x-2$ --------------------------------------○+++++++++++++

Segno $\dfrac{x-1}{x-2}$ +++++++++++++●---------------○++++++++++++++

La disequazione è verificata dove numeratore e denominatore hanno segno concorde.

Risultato: $x \leq 1$ e $x>2$ (il valore 2 va escluso perché azzera il denominatore)

64) $\dfrac{x-3}{2x-5} \leq 0$

________________5/2__________3______________________

Segno $x-3$ --------------------------------------●+++++++++++++++++++

Segno $2x-5$ ---------------------○+++++++++++++++++++++++++++++

Segno $\dfrac{x-3}{2x-5}$ ++++++++++++○---------------●+++++++++++++++++++

La disequazione è verificata dove numeratore e denominatore hanno segno discorde.

Risultato: $5/2<x \leq 3$ (il valore 5/2 va escluso perché azzera il denominatore)

65) $\dfrac{3-x}{3x-7}<0$

________________7/3__________3_____________________

Segno $3-x$ ++++++++++++++++++++++++o------------------------------

Segno $3x-7$ ---------------------o++++++++++++++++++++++++++++++

Segno $\dfrac{3-x}{3x-7}$ ---------------------o+++++++++o------------------------------

La disequazione è verificata dove numeratore e denominatore hanno segno discorde.

Risultato: $x<7/3$ e $x>3$ (il valore 3 va escluso perché la diseguaglianza è stretta)

66) $\dfrac{x^2-5x+8}{9-x^2}<0$

Noto che il delta dell'equazione associata al numeratore è negativo (non ci sono radici reali).

________________-3__________3_____________________

Segno x^2-5x+8 ++

Segno $9-x^2$ ----------------------o+++++++++o-----------------------------

Segno $\dfrac{x^2-5x+8}{9-x^2}$ ------------------------o+++++++++o------------------------------

La disequazione è verificata dove numeratore e denominatore hanno segno discorde.

Risultato: $x<-3$ e $x>3$

67) $\dfrac{x(x-1)^3}{x^4-81}\geq 0$

Possiamo riscrivere la disequazione nel modo che segue:

$$\frac{x(x-1)^3}{(x^2-9)(x^2+9)}\geq 0$$

In questo caso sia numeratore che denominatore sono prodotti di due fattori. Per individuare dove è verificata la disequazione occorre studiare il segno di tutti i fattori.

Facciamo prima due osservazioni:

$(x-1)^3\geq 0$ se solo se $x-1\geq 0$ e cioè $x\geq 1$ (perché l'esponente è dispari)

$x^2+9>0$ è sempre strettamente positiva (somma di un quadrato e di un numero positivo)

Ripetiamo la procedura vista sinora riportando tutti i fattori

________________-3_____0__1___3__________________

Segno x --------------------------------●++++++++++++++++++++++

Segno $(x-1)^3$ --------------------------------------●+++++++++++++++++++

Segno x^2+9 +++

Segno x^2-9 +++++++++++++○------------------○++++++++++++++++

Segno $\dfrac{x(x-1)^3}{(x^2-9)(x^2+9)}$ +++++++++++++○---------●++●----○++++++++++++++++

Risultato: $x<-3$ e $0\le x\le 1$ e $x>3$

68) $\dfrac{2x-1}{x-3}<\dfrac{x+1}{x-1}$

$$\frac{2x-1}{x-3}-\frac{x+1}{x-1}<0$$

$$\frac{(2x-1)(x-1)-(x+1)(x-3)}{(x-3)(x-1)}<0$$

$$\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+3x-x+3}{(x-3)(x-1)}<0$$

$$\frac{x^2-x+4}{(x-3)(x-1)}<0$$

Nota: il delta dell'equazione associata al numeratore è negativo.

_________________1_____________3_________________

Segno x^2-x+4 +++

Segno $x-3$ --○++++++++++++++++

Segno $x-1$ ---------------------○++++++++++++++++++++++++++++++

Segno $\dfrac{x^2-x+4}{(x-3)(x-1)}$ ++++++++++++++○-------------------○+++++++++++++++++

Risultato: $1<x<3$

69) $\dfrac{x^4}{x^3-8}<0$

_________________0____________2_________________

Segno x^4 ++++++++++++++○+++++++++++++++++++++++++++++

Segno x^3-8 --○+++++++++++++++++

Segno $\dfrac{x^4}{x^3-8}$ ----------------------- o-----------------o++++++++++++++++++

Nota sul segno del denominatore:

$x^3-8>0$ allora $x^3>8$ segue $x>2$ (il denominatore è positivo per $x>2$)

Risultato: $x<2$ e $x \neq 0$

70) $\dfrac{x^2-4x+3}{4-x^2} \leq 0$

L'equazione associata al numeratore ha soluzioni 1 e 3.

__________-2__________1________2_______3___________

Segno x^2-4x+3 ++++++++++++++++++++●----------------------●++++++++++

Segno $4-x^2$ ---------------o+++++++++++++++++o---------------------------

Segno $\dfrac{x^2-4x+3}{4-x^2}$ ---------------o++++++++++●---- ---------o++++++●------------------

Risultato: $x<-2$ e $1 \leq x < 2$ e $x \geq 3$

71) $4x^3-x=0$

$x(4x^2-1)=0$

$x(2x-1)(2x+1)=0$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto uguagliando a zero i tre fattori:

$x=0$ $2x-1=0$ $2x+1=0$

Risolviamo queste tre semplici equazioni di primo grado.

Risultato: $x=0$, $x=\pm 1/2$

72) $(x^4-x)(x^3-27)(7x-2)=0$

$x(x^3-1)(x^3-27)(7x-2)=0$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto uguagliando a zero i quattro fattori.:

$x=0$

$x^3-1=0 \rightarrow x^3=1 \rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$

$x^3-27=0 \rightarrow x^3=27 \rightarrow x=\sqrt[3]{27}=3$

$7x-2=0 \rightarrow x=2/7$

Risultato: $x=0$, $x=1$, $x=3$, $x=2/7$

73) $x^3+8+6x^2+12x=0$

Nota: si tratta del cubo di un binomio. Sarà vero?

$(x+2)^3=0$ Provate a vedere se è questo sviluppandolo?

$(x+2)^3=0 \rightarrow x+2=0$

Risultato: $x=-2$

74) $16x^4-1=0$

$(4x^2-1)(4x^2+1)=0$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto. Nota però che il secondo fattore è sempre positivo (è la somma di un quadrato e di un numero positivo).

$4x^2+1\neq 0$ sempre

$4x^2-1=0 \rightarrow x^2=1/4 \rightarrow x=\pm 1/2$

Risultato: $x=\pm 1/2$

75) $54x^4+72x^2-108x^3-16x=0$

$2x(27x^3+36x-54x^2-8)=0$

$2x(3x-2)^3=0$

$x(3x-2)^3=0$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto.

$x=0$

$(3x-2)^3=0 \Leftrightarrow 3x-2=0$

Risultato: $x=0$, $x=2/3$

76) $(x^2-5x+6)(x^4+5x^2)\geq 0$

$\left(x^2-5x+6\right)x^2\left(x^2+5\right)\geq 0$

Per individuare i valori dell'incognita per i quali questa disequazione occorre prima determinare il segno dei tre fattori e poi individuare dove il loro prodotto è non negativo.

Alcune osservazioni:

- l'equazione associata al primo fattore ha come soluzioni 2 e 3
- il secondo fattore è sempre non negativo (è nullo solo per x=0)
- il terzo è sempre positivo (somma di un quadrato e di un numero positivo

Facciamo comunque il solito diagramma:

	_________0___________2__________3________________
Segno $\left(x^2-5x+6\right)$	+++++++++++++++++++-------------+++++++++++++
Segno x^2	+++
Segno x^2+5	+++
Segno $\left(x^2-5x+6\right)x^2\left(x^2+5\right)$	++++++++++++++++++++-------------++++++++++++

Risultato: $x\leq 2$ e $x\geq 3$

77) $\left(x^2+5x\right)\left(2x-3\right)\leq 0$

Alcune osservazioni:

- l'equazione associata al primo fattore ha come soluzioni 0 e -5

Facciamo il diagramma:

	_________-5___________0__________3/2_________
Segno x^2+5x	+++++++++----------------- +++++++++++++++++++
Segno $2x-3$	---++++++++++
Segno $\left(x^2+5x\right)\left(2x-3\right)$	-----------++++++++++++---------------++++++++++

Risultato: $x\leq -5$ e $0\leq x\leq 3/2$

78) $x^2\left(-x^2-2x+35\right)>0$

Moltiplico per -1

$x^2\left(x^2+2x-35\right)<0$

Alcune osservazioni:

- l'equazione associata al secondo fattore ha come soluzioni -7 e 5 ed è dunque strettamente negativa per valori compresi tra –7 e 5 (estremi esclusi).
- il primo fattore è sempre non negativo (è nullo solo per x=0)

In questo caso non perdo tempo a fare il digramma dato che, essendo il primo fattore sempre positivo e nullo solo per x=0, il prodotto dei due fattori sarà negativo nell'intervallo di valori in cui è negativo il primo fattore. Tuttavia affinché il prodotto sia strettamente negativo dobbiamo escludere da tale intervallo il valore x=0.

Risultato: $-7<x<0$ e $0<x<5$

79) $\left(x^2-1\right)\left(x^4+3x^2+35\right)<0$

Alcune osservazioni:

- l'equazione associata al primo fattore ha come soluzioni -1 e 1 ed è dunque strettamente negativa per valori compresi tra –1 e 1 (estremi esclusi)
- il secondo fattore è sempre positivo (in quanto somma di due termini al quadrato e di un numero positivo)
- il segno del prodotto coincide quello del primo fattore.

Risultato: $-1<x<1$

80) $(x-4)^4(2x+3)^3(2-x)^3(1-2x)>0$

Alcune osservazioni

- il segno complessivo è determinato da quello derivante dal prodotto dei quattro fattori;
- il primo è positivo (nullo per x=4)
- il secondo ormai lo dovreste sapere è negativo per $x<-3/2$ e positivo per $x>-3/2$
- il terzo è negativo per $x>2$ e positivo per $x<2$
- il quarto è negativo per $x>1/2$ e positivo per $x<1/2$.

	-3/2		1/2		2		4	
$(x-4)^4$	+	+	+	+	+	+	●	+
$(2x+3)^3$	-	●	+	+	+	+	+	+
$(2-x)^3$	+	+	+	+	+	●	-	-
$(1-2x)$	+	+	+	●	-	-	-	-
$(x^2+2)(x^2-2)(2x+3)^3(2-x)^3(1-2x)$	-	●	+	●	-	●	+ ●	+

Risultato: $-3/2 < x < 1/2$ e $2 < x < 4$ e $x > 4$

81) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{4-3x}{12} > 0 \\ 7 - x - 2(x-4) < 3(x+5) - x \end{cases}$

Dopo alcuni semplici passaggi il sistema si riduce al seguente:

$\begin{cases} x > 8/7 \\ x > 0 \end{cases}$

Risolvere un sistema significa individuare gli eventuali intervalli in corrispondenza dei quali tutte le disequazioni sono soddisfatte.

		0		8/7	
Prima				○	———
Seconda		○	———	———	———
Sistema				○	———

Risultato: $x > 8/7$

82) $\begin{cases} x^2 + x + 1 < 0 \\ \dfrac{x-1}{2} - x(x+3) > x^2 - x \end{cases}$

Si noti, senza nemmeno prendere in considerazione la seconda disequazione, che il delta dell'equazione associata alla prima è negativa. Questo significa che il membro di sinistra della prima disequazione è strettamente positivo. Conseguenze:

- la prima disequazione non è mai verificata
- il sistema è impossibile, cioè non esistono valori dell'incognita in corrispondenza dei quali entrambe le disequazioni sono soddisfatte (proprio perché la prima non è mai verificata).

Risultato: Nessuna soluzione

83) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} < 1 \\ 4x^2 - 1 > 2x + 1 \end{cases}$

Dopo alcuni passaggi il sistema si riduce al seguente

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-2} < 0 \\ 2x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$$

Osservazioni:

- Il numeratore della prima disequazione è sempre positivo (è un numero). Ciò che ci interessa perciò è il segno del denominatore, che è negativo per $x < 2$. Di conseguenza la prima disequazione è verificata per $x < 2$.
- L'equazione associata alla seconda disequazione ha come soluzioni –1/2 e 1. La seconda disequazione è verificata per valori esterni cioè $x < -1/2$ e $x > 1$.

Dove sono verificate entrambe?

Risolvere un sistema significa individuare gli eventuali intervalli in corrispondenza dei quali tutte le disequazioni sono soddisfatte.

____-1/2________1______2________

Prima ________________________o

Seconda ______o   o________________

Sistema ______o   o________o

Risultato: $x < -1/2$ e $1 < x < 2$

84) $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$

Osservazioni:

- La prima disequazione è verificata per $x \leq -1$ e $x \geq 1$
- La seconda disequazione è verificata per e $x > 2$

Dove sono verificate entrambe? Chiaramente per $x > 2$ .Chi non lo vede può fare il solito grafico.

Risultato: $x > 2$

85) $\begin{cases} -4x^2 + 9 < 0 \\ -x + 7 > 0 \end{cases}$

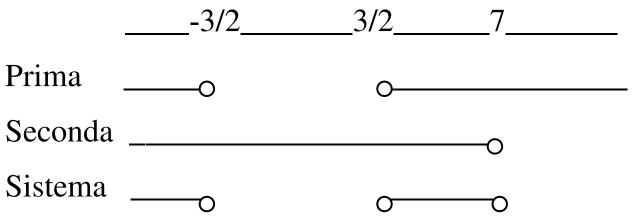
$$\begin{cases} 4x^2 - 9 > 0 \\ x < 7 \end{cases}$$

Osservazioni:

- La prima disequazione è verificata per $x < -3/2$ e $x > 3/2$
- La seconda disequazione è verificata per e $x < 7$

Dove sono verificate entrambe?

Facciamo per l'ultima volta il solito diagramma:



Risultato: $x < -3/2$ e $3/2 < x < 7$

- **Equazioni e disequazioni irrazionali**

86) $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{2}$

Poiché il secondo membro è un numero positivo, per risolvere questa equazione irrazionale è sufficiente elevare al quadrato entrambi i membri e poi fare semplici calcoli.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Risultato: $x = -1$ e $x = 2$

87) $\sqrt{4 - 3x} = x$

Questa equazione è equivalente al sistema seguente (vedere dispensa corso)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - 3x - x^2 = 0 \end{cases}$$

L'equazione del sistema ha soluzione: $x = 1$ e $x = -4$. La seconda radice è evidentemente da escludere in quanto deve essere $x \geq 0$. Verificatelo anche andando a sostituire tali soluzioni nell'equazione irrazionale. Cosa succede?

Risultato: $x = 1$

88) $\sqrt{x + 2} = x + 3$

Questa equazione è equivalente al sistema seguente

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 5x + 7 = 0 \end{cases}$$

Notate che il delta dell'equazione è negativo. Non ci sono radici reali.

Risultato: Nessuna soluzione

89) $\sqrt{4-x} = \sqrt{x-3}$

Questa equazione è equivalente al sistema seguente

$$\begin{cases} x \le 4 \\ x \ge 3 \\ 4-x = x-3 \end{cases}$$

Le prime due disequazione derivano dall'imposizione della condizione di realtà dei due radicali.

$$\begin{cases} 3 \le x \le 4 \\ 2x = 7 \end{cases}$$

L'equazione del sistema ha soluzione: $x = 7/2$ ed è accettabile perché compresa tra 3 e 4.

Risultato: $x = 7/2$

90) $\sqrt[4]{x^3 + 54} = 3$

Il secondo membro è sempre positivo (è 3). Non occorre imporre alcuna condizione prima di elevare ambi i membri alla quarta.

$x^3 + 54 = 81$

$x^3 = 27$

$x = \sqrt[3]{27} = 3$

Risultato: $x = 3$

91) $\sqrt[3]{x^2} = 3$

Quando la radice ha indice dispari non si impongono mai condizioni. Si elevano semplicemente a quella potenza entrambi i membri.

In questo caso eleviamo al cubo.

$x^2 = 27$

Risultato: $x = \pm 3\sqrt{3}$

92) $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{2x-1}$

Eleviamo al cubo.

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Risultato: $x = 1$

93) $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{x^3 - x + 1}$

Eleviamo al cubo e dopo qualche passaggio otteniamo:

$x - 1 = 0$

Risultato: $x = 1$

94) $\sqrt[3]{x^3 - 4x} = x - 1$

Eleviamo al cubo:

$x^3 - 4x = (x-1)^3$

$x^3 - 4x = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$-3x^2 + 7x - 1 = 0$

$3x^2 - 7x + 1 = 0$

Risultato: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$

95) $\sqrt{x^2 - 5} \leq 2$

Dobbiamo imporre la condizione di realtà del primo membro, (quella di positività del secondo non occorre dato che è 2, sempre positivo) ed elevare entrambi i membri al quadrato. In altri termini, la precedente disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 5 \geq 0 \\ x^2 - 5 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \text{ e } x \geq \sqrt{5} \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Se volete potete fare il grafico. Comunque in questo caso è immediato (guardando l'ultimo sistema) individuare il tratto in cui entrambe le condizioni sono soddisfatte.

Risultato: $-3 \leq x \leq -\sqrt{5}$ e $\sqrt{5} \leq x \leq 3$

96) $\sqrt{2x+1} > 1 - x$

Le soluzioni di questa disequazione derivano dall'unione di quelle dei due sistemi seguenti (vedere dispensa):

a) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 1 - x < 0 \end{cases}$ e b) $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x + 1 > 1 - 2x + x^2 \end{cases}$

Troviamo le soluzioni del primo sistema

$$\begin{cases} x \geq -1/2 \\ x > 1 \end{cases}$$

La soluzione del primo sistema è chiaramente $x > 1$

Troviamo le soluzioni del secondo sistema

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 0 < x < 4 \end{cases}$$

La soluzione del secondo sistema è chiaramente $0 < x \leq 1$

La soluzione della disequazione iniziale è data dall'*unione* (somma) di quelle dei due sistemi vale a dire: $x > 1$ e $0 < x \leq 1$ (la loro unione è $x > 0$).

Risultato: $x > 0$

97) $\sqrt{6x - x^2} < 3 - 2x$

Le soluzioni di questa disequazione derivano da quelle del sistema seguente (vedere dispensa):

$$\begin{cases} 6x - x^2 \geq 0 \\ 3 - 2x > 0 \\ 6x - x^2 < 9 - 12x + 4x^2 \end{cases}$$

Dopo un po' di passaggi diventa

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ x < 3/2 \\ 5x^2 - 18x + 9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ x < 3/2 \\ x < 3/5 \text{ e } x > 3 \end{cases}$$

E' immediato constatare che le condizioni riportate nell'ultimo sistema sono congiuntamente soddisfatte tra 0 e 3/5. Se non lo vedete provate a fare il solito grafico.

Risultato: $0 \leq x < 3/5$

98) $\sqrt[3]{2x+1} \geq 1$

Quando l'indice della radice è dispari, è tutto molto più semplice. Non ci sono mai condizioni da porre. Basta elevare entrambi i membri a quell'indice (in questo caso al cubo).

$2x+1 \geq 1$

$2x \geq 0$

$x \geq 0$

Risultato: $x \geq 0$

99) $\sqrt[3]{x^3-1} < x+3$

Eleviamo tutto alla terza:

$x^3 - 1 < (x+3)^3$

$x^3 - 1 < x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$9x^2 + 27x + 28 > 0$

Notate che il delta dell'equazione associata è negativo. Allora la disequazione è sempre verificata.

Risultato: $x \in R$.

100) $\sqrt[3]{x^3-1} < \sqrt[3]{x^3-x}$

$x^3 - 1 < x^3 - x$

$-1 < -x$

$x < 1$

Risultato: $x < 1$

- **Equazioni e disequazioni con valore assoluto**

101) $|3x+7| = 2$

Le equazioni da risolvere sono:

$3x+7=2 \rightarrow x=-5/3$

$3x+7=-2 \rightarrow x=-3$

L'unione delle soluzioni delle due equazioni costituisce il risultato dell'equazione iniziale con il valore assoluto.

Risultato: $x=-5/3$ e $x=-3$

102) $|2x-2| = 0$

L'equazione da risolvere è semplicemente

$2x-2=0$

Risultato: $x=1$

103) $|2x-5|=-2$

Il primo membro è sempre non negativo (pensate alla definizione di valore assoluto). Il secondo è sempre negativo è un numero (-2). Chiaramente non potrà esistere nessun valore che attribuito all'incognita possa rendere vera l'equazione.

Risultato: nessuna soluzione

104) $|x^2-4x|=4$

Le equazioni da risolvere sono

$x^2-4x=4 \to x^2-4x-4=0 \to x=2\pm 2\sqrt{2}$

$x^2-4x=-4 \to x^2-4x+4=0 \to x=2$

L'unione delle soluzioni delle due equazioni costituisce il risultato dell'equazione iniziale con il valore assoluto.

Risultato: $x=2\pm 2\sqrt{2}$ e $x=2$

105) $\left|\frac{x}{x+7}\right|=4$

Le equazioni da risolvere sono

a) $\frac{x}{x+7}=4$ e b) $\frac{x}{x+7}=-4$

a) $\frac{x-4(x+7)}{x+7}=0$ e b) $\frac{x+4(x+7)}{x+7}=0$

Possiamo moltiplicare entrambi i membri di entrambe le equazioni per $x+7$ con $x\neq -7$ e risolvendole otteniamo:

a) $x=-28/3$ e b) $x=-28/5$

Risultato: $x=-28/3$ e $x=-28/5$

106) $\left|\frac{5x-5}{x-2}\right|=2$

Le equazioni da risolvere sono

a) $\frac{5x-5}{x-2}=2$ e b) $\frac{5x-5}{x-2}=-2$

a) $\frac{5x-5-2(x-2)}{x-2}=0$ e b) $\frac{5x-5+2(x-2)}{x-2}=0$

Possiamo moltiplicare entrambi i membri di entrambe le equazioni per $x-2$ con $x \neq 2$ e risolvendole otteniamo:

a) $x = 1/3$ e b) $x = 9/7$

Risultato: $x = 1/3$ e $x = 9/7$

107) $|2x-5| = x$

Questa equazione si scinde in due sistemi e la sua soluzione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

Prima però ricordiamo la definizione di valore assoluto (applicandola al nostro caso)

- $|2x-5| = 2x-5$ se $2x-5 \geq 0$ e cioè se $x \geq 5/2$

- $|2x-5| = -2x+5$ se $2x-5 < 0$ e cioè se $x < 5/2$

Scriviamo ora i due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 5/2 \\ 2x-5 = x \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x < 5/2 \\ -2x+5 = x \end{cases}$$

Risolviamo il primo

$$\begin{cases} x \geq 5/2 \\ x = 5 \end{cases}$$

tale soluzione è accettabile in quanto soddisfa la condizione $x \geq 5/2$.

Risolviamo il secondo

$$\begin{cases} x < 5/2 \\ x = 5/3 \end{cases}$$

anche questa soluzione è accettabile essendo 5/3<5/2

L'unione di queste soluzioni da quella dell'equazione iniziale.

Risultato: $x = 5/3$ e $x = 5$

108) $|x^2-1| = x+1$

Procediamo come nel caso precedente

- $|x^2-1| = x^2-1$ se $x^2-1 \geq 0$ e cioè se $x \leq -1$ e $x \geq 1$

- $|x^2-1| = -x^2+1$ se $x^2-1 < 0$ e cioè se $-1 < x < 1$

Scriviamo ora i due sistemi:

$$\begin{cases} x \le -1 \text{ e } x \ge 1 \\ x^2 - 1 = x + 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -x^2 + 1 = x + 1 \end{cases}$$

Risolviamo il primo

$$\begin{cases} x \le -1 \text{ e } x \ge 1 \\ x = -1 \text{ e } x = 2 \end{cases}$$

Risolviamo il secondo

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x = -1 \text{ e } x = 0 \end{cases}$$

L'unione delle soluzione dei due sistemi fornisce quella dell'equazione iniziale.

Risultato: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$

109) $|3x + 7| < 2$

La precedente disequazione equivale a:

$-2 < 3x + 7 < 2$

$-9 < 3x < -5$

Risultato: $-3 < x < -5/3$

110) $|x^2 - 4| > 5$

Le soluzioni di questa disequazione si ottengono dall'unione di quelle delle seguenti disequazioni:

a) $x^2 - 4 < -5$ e b) $x^2 - 4 > 5$ cioè

a) $x^2 + 1 < 0$ e b) $x^2 - 9 > 0$

La disequazione a) non ammette soluzioni (un quadrato sommato ad un numero positivo non può mai essere negativo).

La disequazione b) è soddisfatta per $x < -3$ e $x > 3$.

Risultato: $x < -3$ e $x > 3$

111) $|3 + 2x| < 4x + 1$

Questa disequazione si scinde in due sistemi e la sua soluzione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

Ricordiamo la definizione di valore assoluto (applicandola al nostro caso)

- $|3 + 2x| = 3 + 2x$ se $3 + 2x \ge 0$ e cioè se $x \ge -3/2$

- $|3 + 2x| = -3 - 2x$ se $3 + 2x < 0$ e cioè se $x < -3/2$

Scriviamo ora i due sistemi:

$\begin{cases} x \geq -3/2 \\ 3+2x < 4x+1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x < -3/2 \\ -3-2x < 4x+1 \end{cases}$

Risolviamo il primo

$\begin{cases} x \geq -3/2 \\ x > 1 \end{cases}$

Il primo ha dunque soluzione $x > 1$

Risolviamo il secondo

$\begin{cases} x < -3/2 \\ x > -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Il secondo non ha nessuna soluzione.

La disequazione originale è verificata pertanto solo per $x > 1$.

Risultato: $x > 1$

112) $|5-2x| > 4+x$

Questa disequazione si scinde in due sistemi e la sua soluzione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi.

Ricordiamo la definizione di valore assoluto (applicandola al nostro caso)

-$|5-2x| = 5-2x$ se $5-2x \geq 0$ e cioè se $x \leq 5/2$

-$|5-2x| = -5+2x$ se $5-2x < 0$ e cioè se $x > 5/2$

Scriviamo ora i due sistemi:

$\begin{cases} x \leq 5/2 \\ 5-2x > 4+x \end{cases}$ e $\begin{cases} x > 5/2 \\ -5+2x > 4+x \end{cases}$

Risolviamo il primo

$\begin{cases} x \leq 5/2 \\ x < 1/3 \end{cases}$

Il primo ha dunque soluzione $x < 1/3$

Risolviamo il secondo

$\begin{cases} x > 5/2 \\ x > 9 \end{cases}$

Il secondo ha nessuna soluzione $x > 9$.

L'unione di queste soluzioni da quella della disequazione originale.

Risultato: $x < 1/3$ e $x > 9$

- **Sistemi di due equazioni lineari in due incognite**

113) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4y+6=2x \end{cases}$

Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per (-2) e riordinandoli si ottiene:

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x-2y=3 \end{cases}$$

Risultato: il sistema è indeterminato

114) $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 4x-y=1 \end{cases}$

Ricaviamo per esempio dalla 2° $y=4x-1$ lo sostituiamo nella prima ottenendo dopo alcuni semplici passaggi algebrici $x=1$. Sostituiamo tale valore al posto della x nella espressione $y=4x-1$ e otteniamo immediatamente $y=3$.

Risultato: $x=1 \quad y=3$

115) $\begin{cases} \frac{3}{5}x+\frac{7}{3}y=\frac{5}{2} \\ \frac{3}{5}x-\frac{2}{3}y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Possiamo per esempio riscrivere la 2° così $\frac{3}{5}x=\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}$ e sostituire nella 1° ottenendo (dopo un semplice passaggio):

$\frac{2}{3}y+\frac{7}{3}y=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}$ e quindi dopo banali calcoli $y=1$ Sostituiamo tale valore al posto di y nella 2°

$\frac{3}{5}x=\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}$ ottenendo $\frac{3}{5}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ e quindi $x=\frac{5}{18}$.

Risultato: $x=5/18 \quad y=1$

116) $\begin{cases} x=-\frac{3}{4} \\ y=\frac{2}{3}x+1 \end{cases}$

In questo caso siamo fortunati. Basta sostituire il valore –3/4 al posto della x nella 2° equazione:

$$y=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)+1=-\frac{6}{12}+\frac{12}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Risultato: $x = -3/4 \quad x = 1/2$

117) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{4} \\ x = \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Siamo ancora fortunati! Abbiamo già il valore di y

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

Risultato: $x = 0 \quad y = 3/4$

118) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{5}x \\ y = -\dfrac{3}{5}x + 2 \end{cases}$

Sostituiamo la 1° nella 2° e dopo un piccolo passaggio otteniamo $\dfrac{6}{5}x = 2$ e perciò $x = \dfrac{5}{3}$.

Sostituiamo tale valore nella 1° : $y = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = 1$.

Risultato: $x = 5/3 \quad y = 1$

119) $\begin{cases} y - \dfrac{3}{5}x = 1 \\ y - \dfrac{3}{5}x = 0 \end{cases}$

E' immediato verificare che il sistema non ammette soluzione. La solvibilità di questo sistema implicherebbe che 0 sia uguale a 1, il che è ovviamente impossibile.

Risultato: nessuna soluzione

120) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$

Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per (-2) otteniamo di nuovo la 1°.

Il sistema ha infinite soluzioni.

Risultato: il sistema è indeterminato.