Parte seconda:

Geometria Analitica

Capitolo 3: La retta

3a) Introduzione

L'equazione $ax+by+c=0$ con $a,\ b,\ c\in R$ e con $a,\ b$ non contemporaneamente nulli si dice equazione lineare nelle variabili x ed y.

Ogni coppia di valori $(\hat{x};\hat{y})$ tale che $a\hat{x}+b\hat{y}+c=0$ rappresenta una soluzione dell'equazione $ax+by+c=0$.

Le coppie di valori $(\hat{x};\hat{y})$ che soddisfano $ax+by+c=0$ sono infinite e si ottengono attribuendo valori arbitrari ad una delle due variabili e ricavando i corrispondenti valori dell'altra variabile.

Facciamo un esempio concreto.

Si consideri l'equazione lineare seguente:

$2x+y+3=0$

che può essere scritta come:

$y=-2x-3$.

Scriviamo solo alcune delle soluzioni di questa equazione

Per esempio

- se fissiamo $x=-1$ allora $y=-2(-1)-3=2-3=-1$
- se fissiamo $x=0$ allora $y=-2\cdot 0-3=-3$
- se fissiamo $x=1$ allora $y=-2\cdot 1-3=-5$

Le tre soluzioni che abbiamo trovato attribuendo numeri a caso alla x sono dati dalle tre coppie:

$(-1;-1)(0;\text{-}3)(1,\text{-}5)$

Potremmo andare avanti all'infinito scegliendo valori qualsiasi di $x\in R$ ed otterremmo altrettanti valori corrispondenti di $y\in R$.

Queste soluzioni possono essere considerate come coordinate in un sistema di assi cartesiani.

Si può dimostrare che *tutte* le infinite soluzioni dell'equazione $ax+by+c=0$ sono allineate.

In altri termini possiamo rappresentare graficamente le soluzioni dell'equazione $ax+by+c=0$ in un sistema di assi cartesiani mediante una opportuna retta. Per rappresentare graficamente tale retta è sufficiente trovare due soluzioni (che nel piano cartesiano sono due punti) e tracciare una linea retta passante per entrambi.

Prima di andare oltre, affrontiamo il tema dell'appartenenza o meno di un punto ad una retta. In particolare, consideriamo i quattro punti seguenti

$(-1;-1)$ $(0;-3)$ $(1,-5)$ $(1;-1)$

e verifichiamo se appartengono alla retta $2x+y+3=0$.

Se in precedenza abbiamo svolto i calcoli correttamente i primi tre punti apparterranno sicuramente. In caso contrario, vorrà dire che in precedenza si è sbagliato qualche calcolo o che si sta sbagliando ora.

- Sostituendo le coordinate del primo punto nella equazione $2x+y+3=0$ si ottiene –2-1+3=0 cioè una identità 0=0. Questo conferma il fatto che il primo punto giace sulla retta. Per fare questo tipo di verifica potete usare l'equazione $2x+y+3=0$ o qualsiasi sua altra espressione equivalente. Per esempio, la verifica potrebbe essere effettuata anche utilizzando l'equazione espressa in questa forma $y=-2x-3$. Proviamo a sostituire di nuovo le coordinate del primo punto in quest'ultima rappresentazione della stessa retta. In questo caso otteniamo -1=2-3 allora -1 = -1. Abbiamo ovviamente ancora ottenuto una identità.
- Sostituendo le coordinate del secondo punto nella equazione $2x+y+3=0$ si ottiene -3+3=0 cioè una identità 0=0. Come già ci aspettavamo anche il secondo punto appartiene alla retta assegnata.
- Sostituendo le coordinate del terzo punto nella equazione $2x+y+3=0$ si ottiene 2-5+3=0 cioè una identità 0=0. Come già sapevamo anche il terzo punto appartiene alla retta.
- Il quarto punto è stato scelto a caso e quindi potrebbe appartenere o meno. Sostituendo le sue coordinate nell'equazione $2x+y+3=0$ si ottiene 2-1+3=5, ma $5 \neq 0$ sempre. Il punto non appartiene alla retta. La stessa verifica potrebbe essere fatta in alternativa sostituendo le coordinate del quarto punto nell'equazione equivalente $y=-2x-3$. Il primo membro è –1 ed il secondo –5. Ovviamente $-1 \neq -5$.

Quale lezione possiamo trarre da questo noioso esempio:

- *per verificare se un punto giace su una retta assegnata occorre sostituire le coordinate del punto nell'equazione assegnata (o in una sua versione equivalente) al posto delle incognite. Se si ottiene una identità, allora il punto appartiene alla retta assegnata. In caso contrario, non appartiene.*

Vediamo ora un altro paio di semplici esempi

Data la retta $y = 2$ dire quali dei seguenti punti (1;0) (2;2) (-1/2,2) appartengono alla retta?

Il primo non appartiene $0 \neq 2$.

Il secondo appartiene 2=2

Il secondo appartiene 2=2.

Notate che in questo caso particolare il valore di x non incide minimamente sull'appartenenza o meno del punto alla retta. *Ciò che conta è solo l'ordinata*. Gli infiniti punti con ordinata 2 appartengono alla retta. La retta in questione infatti è una retta orizzontale e tutti i suoi punti hanno ordinata 2.

Altro esempio.

Data la retta $x = 2$ dire quali dei seguenti punti (1;0) (2;2) (-1/2,2) appartengono alla retta?

In questo caso solo il secondo punto appartiene (verificatelo come prima). Perché? La retta in questione è una retta verticale e tutti i punti che le appartengono hanno ascissa 2, il valore dell'ordinata è ininfluente. Solo il secondo punto ha ascissa 2.

Concludiamo questo paragrafo ripartendo dall'equazione generale della retta:

$$ax + by + c = 0$$

detta equazione in *forma implicita*.

Esiste un'altra forma detta *esplicita* equivalente alla precedente.

Partiamo dall'equazione $ax + by + c = 0$ ed esplicitiamola rispetto alla variabile *y*:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Definendo

$$m = -\frac{a}{b} \text{ e } q = -\frac{c}{b}$$

possiamo scrivere

$$y = mx + q.$$

Quest'ultima è l'equazione generale della retta in *forma esplicita*, dove m è detto *coefficiente angolare* (o *pendenza*) e q è *l'ordinata dell'intersezione della retta con l'asse verticale.*

Facciamo un esempio

Data l'equazione $2x + 3y - 1 = 0$ calcolare il suo coefficiente angolare e le coordinate dell'intercetta.

Per prima cosa dobbiamo fare è passare dalla forma implicita a quella esplicita della retta:

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ (forma esplicita)

Il coefficiente angolare è $m = -2/3$ mentre le coordinate dell'intercetta sono $(0;1/3)$.

3b) Rette orizzontali, rette verticali, rette con inclinazione qualsiasi

L'equazione della retta in forma implicita è $ax + by + c = 0$

Caso a) Rette orizzontali

$a = 0$ e $b \neq 0 \rightarrow by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{c}{b} = q$ Nota: $m = -\frac{a}{b} = 0$

Se inoltre $c = 0 \rightarrow y = 0$ (equazione asse orizzontale *x*)

Caso b) Rette verticali

$a \neq 0$ e $b = 0 \rightarrow ax + c = 0 \rightarrow x = -\frac{c}{a}$

Se inoltre $c = 0 \rightarrow x = 0$ (equazione asse verticale *y*)

Caso b) Rette qualsiasi

$a \neq 0$ e $b \neq 0 \rightarrow ax + by + c = 0 \rightarrow y = mx + q$

Se inoltre $c = 0 \rightarrow ax + by = 0 \rightarrow y = mx$ ($q = 0$ la retta passa per l'origine)

3c) Intersezione tra due rette: Incidenza, Perpendicolarità, Parallelismo e Coincidenza

Per trovare l'eventuale punto di intersezione tra due rette occorre metterle a sistema. Il sistema è lineare con due equazioni in due incognite.

Come già evidenziato nella sezione dedicata alla soluzione dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite, si possono presentare tre casi:

- il sistema è determinato. Le due rette sono *incidenti* ed hanno un solo punto in comune. In particolare due rette incidenti sono anche *perpendicolari* se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a –1 (l'eccezione è rappresentata dalle rette orizzontali e verticali);
- il sistema è impossibile. Le due rette non hanno punti in comune, sono *parallele*. Utilizzando la forma esplicita della retta, possiamo dire che due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, ma intercetta diversa;
- il sistema è indeterminato. Le due rette hanno infiniti punti in comune, sono *coincidenti*.

Vediamo alcuni esempi.

Dire quali delle seguenti coppie di rette sono incidenti, perpendicolari, parallele, coincidenti. Dare anche la motivazione.

Consiglio preliminare:

Ogni volta che avete l'equazione di una retta in forma implicita passate alla sua rappresentazione in forma esplicita.

a) $y = 3x - 1$ $\qquad y = -3x + 1$

b) $y = (1/3)x$ $\qquad y = -(1/3)x - 10$

c) $x = -9$ $\qquad x = 5$

d) $y = 5$ $\qquad y = 2$

e) $x = -9$ $\qquad y = 2$

f) $y = (1/2)x$ $\qquad y = -2x + 1$

g) $4y - 4x = 0$ $\qquad y = x + 1$

h) $y - 3x = 0$ $\qquad y = -(1/3)x - 1$

i) $y - 2 = 0$ $\qquad x = 7$

j) $y = -2x$ $\qquad y + (1/2)x = 12$

k) $6y - 2x + 1 = 0$ $\qquad 2y - 6x + 1 = 0$

l) $y + (1/2)x = 12$ $\qquad y = 2x - 39$

m) $y = -2x - 1$ $\qquad 2y + 4x = -2$

Risolviamo partendo dal caso:

a) $y = 3x - 1$ $\qquad y = -3x + 1$

Le due rette hanno coefficienti angolari 3 e –3. Sono diversi, e perciò le due rette sono sicuramente incidenti (cioè hanno un punto di intersezione). Il prodotto dei coefficienti angolari è –9 e perciò non sono perpendicolari.

b) $y = (1/3)x$ $\qquad y = -(1/3)x - 10$

Le due rette hanno coefficienti angolari 1/3 e –1/3. Le due rette sono incidenti. Il prodotto dei coefficienti angolari è –1/9 e perciò non sono perpendicolari.

c) $x = -9$ $\qquad x = 5$

Le due rette sono verticali e dunque parallele.

d) $y = 5$ $\qquad y = 2$

Le due rette sono entrambe orizzontali e quindi parallele.

e) $x = -9$ $y = 2$

La 1° è verticale e la 2° orizzontale. Sono incidenti ed in particolare perpendicolari.

f) $y = (1/2)x$ $y = -2x + 1$

Le due rette hanno coefficienti angolari 1/2 e –2. Sono diversi, e perciò le due rette sono sicuramente incidenti. Il loro prodotto è –1 e perciò sono anche perpendicolari.

g) $4y - 4x = 0 \to y = x$ $y = x + 1$

Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare 1 e perciò sono parallele. La prima passa per l'origine.

h) $y - 3x = 0 \to y = 3x$ $y = -(1/3)x - 1$

Sono incidenti perché hanno coefficienti angolari diversi, ed anche perpendicolari in quanto il loro prodotto è –1.

i) $y - 2 = 0 \to y = 2$ $x = 7$

Le due rette sono perpendicolari. La prima è orizzontale e la seconda verticale.

j) $y = -2x$ $y + (1/2)x = 12 \to y = -(1/2)x + 12$

Sono incidenti poiché i coefficienti angolari sono diversi. Il loro prodotto è 1 e perciò non sono perpendicolari.

k) $6y - 2x + 1 = 0 \to y = (1/3)x - 1/6$ $2y - 6x + 1 = 0 \to y = 3x - 1/2$

Incidenti, ma non perpendicolari.

l) $y + (1/2)x = 12 \to y = -(1/2)x + 12$ $y = 2x - 39$

Incidenti e perpendicolari. Il prodotto dei coefficienti di pendenza è –1.

m) $y = -2x - 1$ $2y + 4x = -2 \to y = -2x - 1$

Le due rette sono coincidenti.

3d) Determinazione dell'equazione della retta

Affrontiamo l'argomento direttamente con alcuni esempi.

Consideriamo tre casi.

Caso A) Passaggio per due punti

Determinare l'equazione della rette passante per le seguenti coppie di punti:

1. $(0;1)$ $(2;2)$

L'equazione della retta in forma esplicita è $y = mx + q$. Dobbiamo applicare le condizioni di appartenenza dei due punti alla retta.

$1 = q \to q = 1$ (condizione di appartenenza del 1° punto)

$2 = 2m + 1$ (condizione di appartenenza del 2° punto)

Sostituiamo $q = 1$ al posto di q nella 2° e ricaviamo da questa equazione $m = 1/2$. La retta cercata è dunque $y = (1/2)x + 1$.

2. $(-1;1)$ $(-2;2)$

Si nota immediatamente che si tratta della bisettrice del 3° e 4° quadrante e quindi l'equazione cercata è $y = -x$. Notate infatti che per entrambi i punti l'ascissa e l'ordinata hanno lo stesso modulo ma segno opposto (le ascisse sono negative, le ordinate positive).

Tuttavia, risolviamo il problema anche utilizzato l'approccio precedente per prendere dimestichezza.

$1 = -m + q \to m = q - 1$ (condizione di appartenenza del 1° punto)

$2 = -2m + q$ (condizione di appartenenza del 2° punto)

Svolgendo passaggi simili al caso precedente otteniamo $q = 0$ e $m = -1$.

La retta, come già anticipato, ha equazione $y = -x$.

3. $(-1;1)$ $(7;1)$

Notate che i due punti hanno la stessa ordinata. La retta che li unisce è orizzontale ed è $y = 1$.

4. $(3;1)$ $(3;-5)$

I due punti hanno la stessa ascissa. La retta che li unisce è verticale e ha equazione $x = 3$.

Caso B) Passaggio per un punto e parallelismo

Determinare l'equazione della retta parallela a quella assegnata e passante per il punto indicato:

5. $y = 3x + 1$ $(-1;1)$

$m = 3$ (condizione di parallelismo)

$1 = -m + q$ (condizione di appartenenza del punto)

Dopo banali calcoli otteniamo $q = 4$ e $m = 3$.

La retta ha equazione $y = 3x + 4$

6. $y = x + 1$ $(0;0)$

La retta cercata ha $q = 0$ (passa per l'origine) e $m = 1$ (condizione di parallelismo).

La sua equazione è $y = x$.

7. $y = 5$ $(-1;1)$

La retta deve essere orizzontale (condizione di parallelismo). Poiché l'ordinata del punto è 1, l'equazione cercata è $y = 1$

8. $x = -2$ $(9;1)$

La retta deve essere verticale (condizione di parallelismo). Poiché l'ascissa del punto è 9, l'equazione cercata è $x = 9$

Caso C) Passaggio per un punto e perpendicolarità

Determinare l'equazione della retta perpendicolare a quella assegnata e passante per il punto indicato:

9. $y = 3x - 2$ $(-1;1)$

$m = -1/3$ (condizione di perpendicolarità)

$1 = -m + q$ (condizione di appartenenza del punto)

Dopo qualche calcolo otteniamo $q = 2/3$ e $m = -1/3$.

La retta ha equazione $y = -(1/3)x + 2/3$

10. $y = 2x + 7$ $(0;0)$

$m = -1/2$ (condizione di perpendicolarità)

$q = 0$ (condizione di appartenenza del punto)

La retta ha equazione $y = -(1/2)x$

11. $y = -5$ $\qquad (-3;1)$

La retta assegnata è orizzontale. Quella cercata deve essere verticale. Poiché l'ascissa del punto è –3, l'equazione cercata è $x = -3$

12. $x = 4$ $\qquad (0;3)$

La retta assegnata è verticale. Quella cercata deve essere orizzontale. Poiché l'ordinata del punto 3, l'equazione cercata è $y = 3$

Suggerimento: verificate sempre alla fine dell'esercizio se la retta trovata è quella corretta. Sostituite il punto (o i due punti Caso A) per il quale (per i quali) la retta deve passare nell'espressione trovata. Se ottenete una identità allora avete fatto bene i calcoli, altrimenti da qualche parte c'è qualcosa che non va. Sbagliare un esercizio semplice come questo nel compito significa buttare via punti.

Capitolo 4: La parabola con asse verticale

4a) Premessa

In questo capitolo tratteremo l'argomento nel modo più semplice possibile, e con molti tagli dati gli obiettivi limitati di questo corso. Non daremo la definizione di parabola come luogo geometrico, e quindi prescinderemo dalle nozioni di fuoco e di direttrice. Il nostro obiettivo, piuttosto, sarà quello di imparare sostanzialmente a disegnare una parabola. Impareremo a calcolarne le intersezioni con gli assi ed il vertice, senza fare ricorso a formule memoniche. La via più sbrigativa per calcolare il vertice di una parabola, lo apprenderete nel corso di matematica generale, quando affronterete il tema dell'ottimizzazione di funzione.

4b) L'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse verticale

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in R$ e con $a \neq 0$ definisce l'equazione generale della parabola con asse verticale.

Come potete notare i parametri che consentono di individuare in maniera univoca una parabola sono tre, mente per la retta due (pensate alla retta nella sua formulazione esplicita).
Per determinare l'equazione di una retta specifica erano perciò necessario avere due informazioni indipendenti, quali per esempio il passaggio per due punti o il passaggio per un punto e la pendenza.
Per determinare l'equazione della parabola sono invece necessarie tre condizioni perché è unicamente determinata da tre parametri.
Diamo un occhiata solo al caso più semplice: il passaggio per tre punti.

Esempio

Determinare l'equazione della parabola passante per i seguenti tre punti

$(0;0)\ \ (1;5)\ \ (4;8)$

I coefficienti a, b, c si ottengono risolvendo il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite, che nasce imponendo la condizione di appartenenza di ciascun punto alla parabola.

$$\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ 16a+4b+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a+b=0 \\ 16a+4b=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ b=6 \\ a=-1 \end{cases}$$

La parabola ha equazione

$y=-x^2+6x$

Notate: noi abbiamo studiato come risolvere i sistemi lineari di due equazioni in due incognite con il metodo di sostituzione. Tale metodo è ancora valido, ma la mole dei conti necessari aumenta. Per questo motivo nell'esercizio ho scelto che uno dei punti fosse l'origine. Le difficoltà dell'esercizio precedente coincidevano con quelle necessarie per risolvere i sistemi lineari di due equazioni e due incognite. La risoluzione dei sistemi lineari sarà trattata in maniera completa nel corso di Matematica Generale.

4c) Concavità, intersezioni con gli assi, asse di simmetria e vertice.

Enunciamo ora una proprietà molto utile.

Se a>0 la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto, mentre se a<0 verso il basso. (Capirete immediatamente il perché quando studierete le derivate).

I diversi casi

Ripartiamo dalla $y=ax^2+bx+c$ e consideriamo alcuni casi particolari:

- $c = 0 \rightarrow y = ax^2 + bx$

In questo caso la parabola passa per l'origine, cioè interseca l'asse verticale nel punto (0;0) ed interseca l'asse orizzontale in due punti che si ottengono imponendo $y = 0$ vale a dire risolvendo la seguente equazione di 2° grado $ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$.

Le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = -b/a$. I punti saranno (0;0) e (-*b/a*;0)

Il vertice della parabola giace sul proprio asse. L'asse di simmetria è una retta verticale che taglia in due parti simmetriche rispetto a tale asse la parabola. Se consideriamo le ascisse di due punti simmetrici della parabola e successivamente calcoliamo il valore medio, otteniamo l'ascissa di uno qualsiasi dei punti che giacciono sull'asse. L'equazione dell'asse sarà $x = Ascissa\ Media$.

Possiamo prendere due punti simmetrici qualunque appartenenti alla parabola e poi considerarne le ascisse. Sicuramente i punti di intersezione con l'asse orizzontale sono simmetrici rispetto all'asse della parabola. Perché? Perché hanno la stessa ordinata.

Riprendiamo i punti di intersezione (0;0) e (-*b/a*;0). L'asse della parabola ha equazione $x = (-b/a + 0)/2 = -b/(2a)$. Poiché il vertice giace sull'asse di simmetria, per calcolare la sua ordinata è sufficiente sostituire $x = -b/(2a)$ nell'equazione $y = ax^2 + bx$.

Proviamo a farlo: $y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} = -\frac{b^2}{4a}$

Il vertice ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$.

- $b = 0 \rightarrow y = ax^2 + c$

In questo caso l'asse di simmetria della parabola coincide con l'asse *y*, ed il punto di intersezione con l'asse verticale ha coordinate (0;*c*). Essendo simmetrica rispetto all'asse verticale ne consegue che il vertice giace su di esso. Poiché la parabola interseca tale asse nel punto (0;*c*), allora esso è il vertice V.

- Se *a*>0 e *c*>0, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto e non ci sono intersezioni con l'asse orizzontale. In altri termini, la parabola assume valori strettamente positivi. L'equazione $ax^2 + c = 0$ non ha radici reali.

- Se *a*>0 e *c*<0, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto e ci sono due punti di intersezioni con l'asse orizzontale, le cui ascisse si ottengono risolvendo l'equazione seguente

$ax^2 + c = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-c/a}$ (notate che –c>0 e che quindi la quantità sotto radice è strettamente positiva).

- Se a<0 e c>0, la parabola ha la concavità rivolta verso il basso e ci sono due intersezioni con l'asse orizzontale, le cui ascisse sono $x = \pm\sqrt{-c/a}$.

- Se a<0 e c<0, la parabola ha la concavità rivolta verso il basso ed interseca il semiasse negativo delle ordinate. Di conseguenza non ci sono intersezioni con l'asse orizzontale. In altri termini, la parabola assume valori strettamente negativi. L'equazione $ax^2 + c = 0$ non ha radici reali.

- $b = 0$ e $c = 0 \rightarrow y = ax^2$

In questo caso la parabola ha il vertice nell'origine cioè $\mathrm{V}(0;0)$.

- $a, b, c \neq 0 \rightarrow y = ax^2 + bx + c$

E' il caso più generale.

Il punto di intersezione con l'asse verticale ha coordinate (0;c).

La parabola può avere o meno intersezioni con l'asse orizzontale:

$ax^2 + bx + c = 0$.

Distinguiamo tre casi:

a) il delta è positivo $\rightarrow$ la parabola ha due punti di intersezione con l'asse delle x

b) il delta è nullo $\rightarrow$ la parabola ha un unico punto di intersezione con l'asse delle x

c) il delta è negativo $\rightarrow$ la parabola non ha intersezioni con l'asse delle x

Nel caso a) la procedura per trovare è identica a quella descritta in precedenza nel caso di $c = 0$.

ATTENZIONE: la formula non è la stessa, il procedimento si. La formula vista in precedenza era un caso particolare.

Nel caso b) l'unico punto di intersezione con l'asse orizzontale è ovviamente anche il vertice della parabola.

Nel caso c) non ci sono punti di intersezione, come facciamo a ricavare il vertice?

Possiamo ancora applicare la procedura di prima?

Quello che serve è l'equazione dell'asse di simmetria. Prima per comodità abbiamo usato le ascisse dei punti di intersezione con l'asse orizzontale per ricavare l'asse di simmetria. Possiamo usare altri due punti simmetrici *appartenenti alla parabola.* Come fare a trovare due punti simmetrici? Questo è il problema! Basta calcolare per esempio l'intersezione tra la parabola in questione e la retta di equazione $y = c$. Cosi' facendo troviamo le ascisse di due punti simmetrici e possiamo calcolare agevolmente l'asse di simmetria. E ripetere tutta la procedura descritta prima.

Facciamolo:

$ax^2+bx+c=c \to ax^2+bx=0 \to$ l'asse di simmetria è $x=-\frac{b}{2a}$. Poiché il vertice appartiene sempre all'asse di simmetria sostituiamo tale valore nell'equazione generale della parabola:

$y=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Il vertice V ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Questa è la formula generale del vertice. Notate che quelle fornite in precedenza sono solo casi particolari. La formula nel caso a) è identica a quest'ultima.

Vediamo alcuni esempi

Specificare la concavità, calcolare le coordinate delle intersezioni con gli assi, l'equazione dell'asse di simmetria e le coordinate del vertice della parabola. Disegnarne infine il grafico.

1. $y=2x^2$

La concavità è rivolta verso l'alto essendo *a*>0 (in particolare *a*=2). Manca il termine noto (cioè *c*=0). La parabola passa per l'origine. L'asse di simmetria ha dunque equazione $x=0$. Il vertice ha coordinate $V(0;0)$.

2. $y=3x^2-9$

La concavità è rivolta verso l'alto essendo *a*>0 (in particolare *a*=3). La parabola interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0;-9)$. Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse orizzontale si ottengo mettendo a sistema l'equazione $y=3x^2-9$ e $y=0$, vale a dire risolvendo l'equazione $3x^2-9=0$ I punti sono dunque $(-\sqrt{3};0)$ e $(\sqrt{3};0)$. Essi sono simmetrici rispetto all'asse verticale $x=0$. Il vertice ha coordinate $V(0;-9)$.

3. $y=x^2-x+1$

La concavità è rivolta verso l'alto essendo *a*>0 (in particolare *a*=1). La parabola interseca l'asse verticale nel punto $(0;1)$. Le ascisse dei punti di intersezione con l'asse orizzontale si ottengo mettendo a sistema l'equazione $y=x^2-x+1$ e $y=0$, vale a dire risolvendo l'equazione

$x^2 - x + 1 = 0$. Il delta è –3, perciò l'equazione non ha radici reali. Di conseguenza non ci sono punti di intersezione con l'asse orizzontale. L'asse di simmetria è $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$. Sostituendo tale valore nell'equazione $y = x^2 - x + 1$ otteniamo l'ordinata del vertice $y = 3/4$. Il vertice è $V(1/2; 3/4)$.

4. $y = 2x^2 - 4x$

La concavità è rivolta verso l'alto essendo *a*>0 (in particolare *a*=2). La parabola interseca l'asse verticale nell'origine. Risolvendo l'equazione $2x^2 - 4x = 0$ otteniamo le ascisse dei punti di intersezione con l'asse delle *x*. Tali punti sono $(0;0)$ e $(2;0)$. L'asse di simmetria è $x = 1$. Il vertice è $V(1;-2)$

5. $y = -x^2 + 2x - 1$

La concavità è rivolta verso il basso essendo *a*<0 (in particolare *a*=-2). La parabola interseca l'asse verticale nel punto $(0;-1)$. Risolvendo l'equazione $-x^2 + 2x - 1 = 0$ otteniamo le ascisse dei punti di intersezione con l'asse delle *x*. Vi è una sola intersezione: il punto $(1;0)$. L'asse di simmetria è $x = 1$. Il vertice è $V(1;0)$.

NOTA BENE: i grafici li mostrerò a lezione

Capitolo 5: L'iperbole equilatera in forma omografica

5a) L'iperbole equilatera traslata

La curva di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

dove i coefficienti *a*, *b*, *c*, *d* sono costanti assegnate appartenenti ad *R* con $c \neq 0$ e $ad \neq cb$

è detta iperbole equilatera in forma omografica o più semplicemente iperbole equilatera traslata.

Essa ha per asintoti le rette di equazione: $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$, e come centro di simmetria il punto i coordinate $(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$, intersezione degli asintoti.

La derivazione analitica di queste formule diverrà più chiara quando seguirete il corso di Matematica Generale e studierete i concetti di limite e di asintoto.

Voglio solo farvi notare per il momento che l'asintoto orizzontale ha come valore il rapporto dei coefficienti assegnati alla variabile *x.* L'asintoto verticale il valore che attribuito alla x azzera il denominatore $cx+d$. Ulteriori spiegazioni ed il grafici li fornirò a lezione.

5b) Casi degeneri

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

- Se solo la prima condizione sui coefficienti viene a cadere: $c=0 \rightarrow y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ che è l'equazione in forma esplicita di una retta con $m=\dfrac{a}{d}$ e $q=\dfrac{b}{d}$.
- Se solo la seconda condizione sui coefficienti viene meno: $ad=bc$. Ciò implica che $a=kc$ e $b=kd$. Allora possiamo scrivere $y=\dfrac{kcx+kd}{cx+d}=k\dfrac{cx+d}{cx+d}=k$ con $x\neq-\dfrac{c}{d}$. Si ha dunque a che fare con una retta orizzontale di equazione $y=k$ con $x\neq-\dfrac{c}{d}$. In altri termini il dominio della funzione $y=k$ è $R-\left\{-\dfrac{c}{d}\right\}$.

5c) Casi particolari

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

- $a=0 \rightarrow y=\dfrac{b}{cx+d}$. Essa ha per asintoti le rette di equazione: $x=-\dfrac{d}{c}$ e $y=0$, e come centro di simmetria il punto i coordinate $(-\dfrac{d}{c};0)$, punto di intersezione degli asintoti.
- $d=0 \rightarrow y=\dfrac{ax+b}{cx}$. Essa ha per asintoti le rette di equazione: $x=0$ e $y=\dfrac{a}{c}$, e come centro di simmetria il punto i coordinate $(0;\dfrac{a}{c})$.
- $a=0$ e $d=0 \rightarrow y=\dfrac{b}{cx}$ Essa ha per asintoti le rette di equazione: $x=0$ e $y=0$, e come centro di simmetria l'origine. In particolare, se inoltre $b=c$, possiamo scrivere $y=\dfrac{1}{x}$.

Vediamo alcuni di semplici esempi.

Calcolare l'equazione degli asintoti e le coordinate del centro di simmetria delle seguenti iperbole e disegnarne il grafico:

1. $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$
2. $y = \dfrac{1}{3x-7}$
3. $y = \dfrac{1-2x}{2x}$
4. $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$
5. $y = \dfrac{3}{4x}$

Soluzioni

1. $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$

Asintoto verticale $x = -3$, asintoto orizzontale $y = 2$, centro simmetria $(-3;0)$

2. $y = \dfrac{1}{3x-7}$

Asintoto verticale $x = 7/3$, asintoto orizzontale $y = 0$, centro simmetria $(7/3;0)$

3. $y = \dfrac{1-2x}{2x}$

Asintoto verticale $x = 0$, asintoto orizzontale $y = -1$, centro simmetria $(0;-1)$

4. $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$

Asintoto verticale $x = 1$, asintoto orizzontale $y = -2$, centro simmetria $(1;-2)$

5. $y = \dfrac{3}{4x}$

Asintoto verticale $x = 0$, asintoto orizzontale $y = 0$, centro simmetria $(0;0)$

NOTATE BENE: I GRAFICI LI SVOLGERO' A LEZIONE.

Appendice:

Richiami su potenze e radicali

Capitolo 3: Potenze e radicali

6a) Proprietà delle potenze ad esponente intero

Ricordiamo che la potenza di un numero relativo è il prodotto di più fattori uguali a quel numero.

Esempi:

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

$\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot = \frac{4}{25}$

Ricordiamo inoltre che

$a^0 = 1$

Esempi

$(-7)^0 = 1$

$12^0 = 1$

Proprietà:

Se a e b sono due numeri reali (zero escluso) ed m ed n sono due numeri interi positivi allora valgono le seguenti proprietà:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Esempi

$3^2 \cdot 3^3 = 3^5$

$2^3 \cdot 2 = 2^4$

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (con $m \geq n$)

Esempi

$(-2)^3 : (-2)^2 = (-2)^1 = -2$

$7^6 : 7^2 = 7^4$

3. $\left(a^{m}\right)^{n} = a^{m \cdot n}$

Esempi

$\left(3^{2}\right)^{3} = 3^{6}$

$\left((-2)^{3}\right)^{3} = (-3)^{9}$

4. $a^{m} \cdot b^{m} = (ab)^{m}$

Esempio

$(-2)^{3} : (-3)^{3} = 6^{3}$

5. $a^{m} : b^{m} = (a/b)^{m}$

$4^{3} : 2^{3} = 2^{3}$

6. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^{m}}$

Esempi

$2^{-3} = 1/2^{3} = 1/8$

$(-2)^{-3} : (-3)^{-3} = 6^{-3} = 1/6^{3}$

$\left((-2)^{-3}\right)^{2} = (-2)^{-6} = \dfrac{1}{(-2)^{6}} = \dfrac{1}{2^{6}}$

$3^{2} \cdot 3^{-3} = 3^{-1} = 1/3$

6b) Potenze ad esponente frazionario

In questo caso è necessario assumere che la base a sia un numero reale positivo.

Proprietà

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

2. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

3. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$

4. $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}}$

5. $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a/b)^{\frac{m}{n}}$

6. $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

Esempi sembrano superflui.

6c) Potenze e radicali

Proprietà

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Esempi

$$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^3 3^3} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$$

- $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

$$2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^3 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3^2}{2}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$16^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(16)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \text{ oppure}$$

$$\left(2^4\right)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

6d) Potenze ad esponente reale

Se a e b sono due numeri reali strettamente positivi ed m ed n sono due numeri reali allora valgono le seguenti proprietà formali delle potenze:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
5. $a^m : b^m = (a/b)^m$