Dispensa
Corso di supporto di Matematica
con
Eserciziario
e
Test
di
Autovalutazione

<u>Corso di supporto di Matematica</u>

Premessa

Questa dispensa costituisce il materiale di base del corso di supporto di matematica. Si articola in tre parti, una dedicata all'algebra, una alla geometria analitica ed una ad un richiamo delle proprietà fondamentali delle potenze e dei radicali. Questa dispensa è accompagnata da un eserciziario, con 200 esercizi svolti e tre test di autovalutazione.

Si raccomanda un'assidua frequenza per chi hanno difficoltà in Matematica. Tutti possono imparare, basta solo un po' di volontà! Altre informazioni e consigli possono essere trovati nella premessa contenuta nell'eserciziario che costituisce parte integrante di questa dispensa. Raccomando vivamente a tutti, non solo a quelli che devono superare gli obblighi formativi (OFA) di matematica, di presentarsi almeno alla prima lezione del coro di supporto, che avrà inizio in ottobre, dove faremo il punto della situazione.

Tutto il materiale è suddiviso in 5 file che potrete scaricare dal sito della Facoltà di Economia di Rimini.

Gian Luca Tassinari

Indirizzo e-mail

gianluca.tasso@libero.it

Parte prima:

ALGEBRA

Capitolo 1: Calcolo letterale e prodotti notevoli

1a) I monomi

1b) Operazioni con monomi

1c) Massimo comune divisore (M.C.D) e Minimo comune multiplo (m.c.m.)

1d) I polinomi

1e) Operazioni con i polinomi

1f) Scomposizioni elementari di polinomi

1g) (M.C.D) e (m.c.m.) di polinomi

1h) Frazioni a termini letterali

1i) Operazioni con le frazioni a termini letterali

Capitolo 2: Equazioni, disequazioni algebriche e sistemi

2a) Generalità sulle equazioni: cenni

2b) Equazioni di primo grado

2c) Disequazioni e loro proprietà: cenni

2d) Disequazioni di primo grado

2e) Equazioni di secondo grado

2f) Disequazioni di secondo grado

2g) Equazioni razionali

2h) Disequazioni razionali

2i) Sistemi di disequazioni

2l) Equazioni irrazionali

2m) Disequazioni irrazionali

2n) Equazioni con valori assoluti

2o) Disequazioni con valori assoluti

2p) Sistemi di due equazioni lineari in due incognite

Parte seconda:

Geometria Analitica

Appendice:

Richiami su potenze e radicali

Parte prima:

ALGEBRA

Capitolo 1: Calcolo letterale e prodotti notevoli

1a) I monomi

Definizione:

un monomio è il prodotto di fattori numerici e letterali, ove gli esponenti dei fattori letterali sono numeri naturali. Il fattore numerico che compare in un monomio viene chiamato *coefficiente*, mentre il prodotto dei fattori letterali viene detto *parte letterale*.

Il *grado* di un monomio è la somma degli esponenti dei fattori letterali.

Due monomi si dicono *simili* se hanno la stessa parte letterale.

Due monomi si dicono *opposti* se si differenziano solo per il segno.

Alcuni esempi chiariranno meglio i concetti appena esposti.

a) $12x^2y^5z$ b) $\frac{1}{2}x$ c) $2x$ d) $-xz$ e) xz

Monomio a) Il coefficiente è 12, la parte letterale è x^2y^5z, il grado è 8 (2+5+1);

I monomi b) e c) sono monomi di grado 1 e sono simili (hanno infatti la stessa parte letterale x) mentre hanno come coefficienti rispettivamente 1/2 e 2;

I monomi d) ed e) sono di grado 2 (1+1) e sono simili (hanno infatti la stessa parte letterale xz). Sono inoltre opposti in quanto differiscono solamente per il segno. Il coefficienti sono infatti rispettivamente –1 e 1.

1b) Operazioni con i monomi

A) Addizione algebrica

La somma di due o più monomi simili è un monomio che ha per parte letterale la stessa dei monomi dati e per coefficiente la somma dei coefficienti dei monomi dati.

Se nella somma di più monomi ve ne sono solo alcuni simili si procede *alla riduzione dei termini simili.*

Vediamo ora un alcuni esempi.

a) $12x^2y^5z+3x^2y^5z-x^2y^5z=14x^2y^5z$

b) $xz+xzy^2+3y+2xz-y-5xzy^2+yk=3xz+2y-4xzy^2+yk$

Si noti che il risultato di a) è un monomio mentre quello di b) no (è un quadrinomio)

c) $\frac{1}{2}xz + xzy^2k - \frac{5}{4}xz - xz = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} - 1\right)xz + xzy^2k =$

$$= \left(\frac{2-5-4}{4}\right)xz + xzy^2k = -\frac{7}{4}xz + xzy^2k$$

Il risultato di c) è un binomio

B) Moltiplicazione

Il prodotto di due o più monomi è il monomio che ha per parte letterale il prodotto delle parti letterali e per coefficiente il prodotto dei coefficienti dei monomi dati.

Presentiamo a fini esplicativi alcuni esempi

a) $12x^2y \cdot 2xzk = 24x^3yzk$

b) $5x^2y \cdot 2x^5y^2z^4 \cdot (-z^2) = -10x^7y^3z^6$

c) $-\frac{1}{2}x^2 \cdot 2x \cdot (-\frac{15}{2}y) = \frac{15}{2}x^3y$

C) Potenza

La potenza di un monomio è il monomio che si ottiene elevando a quella potenza sia il coefficiente che la parte letterale del monomio dato.

Vediamo alcuni esempi

a) $(3x^2y)^3 = 27x^6y^3$

b) $(-\frac{1}{2}xy^3)^3 = -\frac{1}{8}x^3y^9$

c) $\left[(3x^2y)^9\right]^0 = (3x^2y)^0 = 1$

D) Divisione

Il quoziente di due monomi, di cui il primo sia divisibile per il secondo, è il monomio avente per coefficiente il quoziente dei coefficienti e per parte letterale quella formata dalle lettere comuni, con esponente uguale alla differenza degli esponenti) e dalle lettere non comuni del dividendo.

Se i monomi dati non sono divisibili l'uno per l'altro, il loro rapporto si indica con una frazione avente per numeratore il primo monomio e per denominatore il secondo (dopo avere semplificato gli eventuali fattori comuni al divisore ed al dividendo.

Esempi

a) $\frac{27x^6y^3}{9x^4y} = 3x^2y^2$

b) $-\frac{4x^4y^2z}{12x^4y} = -\frac{1}{3}yz$

c) $-\frac{4x^4 zk}{12x^4 y} = -\frac{1}{3}\frac{zk}{y}$

1c) Massimo comune divisore (M.C.D) e Minimo comune multiplo (m.c.m.)

A) Massimo comune divisore (M.C.D)

Si definisce M.C.D di due o più monomi ogni monomio di grado massimo che sia divisore di tutti i monomi dati. In pratica per costruire il M.C.D si costruisce un monomio che presenta solo le lettere comuni a tutti i monomi dati e l'esponente da attribuire a ciascuna lettera è il minore fra quelli che la stessa lettera presenta nei monomi considerati.

B) Minimo comune multiplo (m.c.m)

Si definisce m.c.m. di due o più monomi ogni monomio di grado minimo che sia divisibile per tutti i monomi dati. In pratica per costruire il m.c.m. si costruisce un monomio che presenta tutte le lettere presenti nei monomi dati e l'esponente da attribuire a ciascuna lettera è il maggiore fra quelli che la stessa lettera presenta nei monomi considerati.

Un esempio dovrebbe chiarire meglio i concetti appena esposti

Il M.C.D dei seguenti tre monomi $x^6 y^3$, $xy^5 z^3$, $xy^2 z$ è xy^2, mentre il m.c.m è $x^6 y^5 z^3$

1d) I polinomi

Definizione:

si definisce polinomio la somma algebrica di più monomi non simili tra loro.

Il *grado* di un polinomio è dato da quello più alto dei suoi termini.

Esempio

a) $3x^6 y^3 + 2xy^2$ il grado di questo binomio è 9 (6+3)

b) $-xy^3 + 2xy^2 + z^5$ il grado di questo trinomio è 5

1e) Operazioni con polinomi

A) Somma e differenza

Per sommare due o più polinomi si scrivono uno di seguito all'altro i loro termini, ciascuno con il proprio segno, e si riducono gli eventuali termini simili; per sottrarre due polinomi si scrivono di seguito a quelli del primo quelli del secondo cambiati di segno e si riducono gli eventuali termini simili.

Esempio:

$$\frac{1}{2}x^2y+(-\frac{1}{2}x^2y-y^2)-(3x^2y-y^2+z)=-y^2-3x^2y+y^2-z=-3x^2y-z$$

B) Prodotto

B1) Prodotto di un monomio per un polinomio

Il prodotto di un monomio per un polinomio è il polinomio che si ottiene moltiplicando il monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio:

$$2xy^2(\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}xy^2-\frac{2}{7}xyz)=\frac{2}{3}xy^3+\frac{1}{2}x^2y^4-\frac{4}{7}x^2y^3z$$

B2) Prodotto di due polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo per tutti i termini del secondo ed eseguendo la somma algebrica dei prodotti parziali ottenuti.

Esempi:

a) $(2x+y+z)(x+y)=2x^2+2xy+xy+y^2+zx+zy=2x^2+3xy+y^2+zx+zy$

b) $(2x+y)(x+y)(x-1)=(2x^2+3xy+y^2)(x-1)=$

$$=2x^3+3x^2y+xy^2-2x^2-3xy-y^2$$

B3) Prodotti Notevoli (importante)

- <u>*Somma di due monomi per la loro differenza*</u>

Il prodotto della somma per la differenza di due monomi è uguale alla differenza dei quadrati dei singoli monomi.

Negli esempi svolgiamo tutti i passaggi per mostrare la validità della regola appena esposta:

a) $(x+y)(x-y)=x^2-xy+xy-y^2=x^2-y^2$

b) $(2x+\frac{1}{2})(2x-\frac{1}{2})=4x^2-x+x-\frac{1}{4}=4x^2-\frac{1}{4}$

Nei prossimi esempi lasciamo al lettore perplesso la verifica dei risultati:

c) $(x-1)(x+1)=x^2-1$

d) $(1-x)(1+x)=1-x^2$

e) $(\frac{2}{7}xy^2-\frac{3}{5}x^3)(\frac{2}{7}xy^2+\frac{3}{5}x^3)=\frac{4}{49}x^2y^4-\frac{9}{15}x^6$

- <u>*Quadrato di un binomio*</u>

Il quadrato di un binomio è un trinomio che ha come termini il quadrato del primo monomio, il doppio prodotto del primo per il secondo, il quadrato del secondo.

Nei due esempi che seguono mostriamo la validità della suddetta regola:

a) $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+xy-y^2=x^2+2xy+y^2$

b) $(x-y)^2=(x-y)(x-y)=x^2-xy-xy-y^2=x^2-2xy+y^2$

Mostriamo un altro esempio, e chi non si fida può svolgere tutti i calcoli come sopra!

c) $(\frac{1}{3}x-y)^2=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}xy+y^2$

- *Quadrato di un polinomio*

Il quadrato di un polinomio avente per termini i quadrati di tutti i termini del polinomio dato ed i doppi prodotti di ogni termine per ciascuno degli altri.

Consideriamo come esempi il quadrato di un trinomio:

$$(2x+y-3z)^2=4x^2+y^2+9z^2+4xy-12xz-6yz$$

Il risultato appena esposto può essere, come al solito, facilmente verificato ricordando che

$$(2x+y-3z)^2=(2x+y-3z)(2x+y-3z)$$

- *Cubo di un binomio*

Il cubo di un binomio è un polinomio avente per termini: il cubo del primo termine, il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo e il cubo del secondo termine.

Verifichiamolo con un semplice esempio:

a) $(x+y)^3=(x+y)^2(x+y)=(x^2+2xy+y^2)(x+y)=$

$$=x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2+xy^2+y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Vediamo altri esempi (il lettore dubbioso può svolgere tutti i passaggi come sopra).

c) $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

d) $(-x-y)^3=-x^3-3x^2y-3xy^2-y^3$

e) $(-x+y)^3=-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$

f) $(3x-2y^2)^3=27x^3-54x^2y^2+36xy^4-8y^6$

- *Potenza di un binomio*

Per calcolare la potenza di un binomio con esponente intero maggiore di 3 ci si può avvalere delle proprietà di cui sopra.

Esempi (il calcolo lo lascio al lettore se vuole)

a) $(x-y)^4=(x-y)^2(x-y)^2=(.....)(......)=.......$

b) $(x-y)^5=(x-y)^2(x-y)^3=(.....)(......)=.......$

c) $(x-y)^8=(x-y)^2(x-y)^3(x-y)^3=(.....)(......)(.....)=(.......)(.....)=....$

Come dovrebbe risultare chiaro, al crescere dell'esponente, aumenta il numero delle operazioni da fare in modo sensibile. *La parte che segue sulla formula del binomio di Newton va saltata. La riporto solo per il lettore interessato.*

Una scelta più veloce è data dall'impiego della *formula del binomio di Newton*:

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ dove

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!n-k!}$$

è detto coefficiente binomiale ed il simbolo

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)..........3 \cdot 2 \cdot 1$ e si legge n fattoriale (n è intero).

Per convenzione si ha

$$\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Esempio:

$$(3x-2y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (3x)^{5-k} (-2y)^k =$$

$$= \binom{5}{0}(3x)^5(-2y)^0 + \binom{5}{1}(3x)^4(-2y)^1 + \binom{5}{2}(3x)^3(-2y)^2 + \binom{5}{3}(3x)^2(-2y)^3 +$$

$$+ \binom{5}{4}(3x)^1(-2y)^4 + \binom{5}{5}(3x)^0(-2y)^5 =$$

$$= 243x^5 - 810x^4 y + 1080x^3 y^2 - 720x^2 y^3 + 240xy^4 - 32y^5$$

1f) Scomposizioni elementari di polinomi

- Scomposizione mediante raccoglimento a fattor comune

Illustreremo la procedura direttamente con alcuni semplici esempi:

a) $x^4 - x^3 = x^3(x-1)$

b) $2x^4 + 4x^3 + x = x(2x^3 + 4x^2 + 1)$

c) $18x^5 y - 9x^4 y + \frac{3}{2}x^3 y^2 = 3x^3 y\left(6x^2 - 3x + \frac{1}{2}y\right)$

d) $(2x^2 - y)^2 - 2x(2x^2 - y) = (2x^2 - y)(2x^2 - y - 2x)$

- Scomposizione mediante raccoglimento a fattore comune parziale

Esempi:

a) $ax+by+bx+ay=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$

b) $2x-6y+x^2-3xy=2(x-3y)+x(x-3y)=(x-3y)(2+x)$

c) $3x^2-3xy+3xz-2x+2y-2z=3x(x-y+z)-2(x-y+z)=(x-y+z)(3x-2)$

- Scomposizione mediante prodotti notevoli

Esempi:

- Polinomi quadrati di un binomio

a) $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

b) $x^4+2x^2y+y^2=(x^2+y)^2$

- Polinomi differenza di due quadrati

a) $9x^2-1=(3x-1)(3x+1)$

b) $3x^2-y^4=(\sqrt{3}x-y^2)(\sqrt{3}x+y^2)$

- Polinomi differenza o somma di due cubi

- Abbiamo visto in precedenza che

a) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3$.

Portando a secondo membro il secondo e il terzo termine e cambiandoli di segno otteniamo:

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3x^2y-3xy^2=(x-y)^3+3xy(x-y)=(x-y)\left[(x-y)^2+3xy\right]=$$
$$=(x-y)(x^2-2xy+y^2+3xy)=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

b) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3$

Procedendo come sopra possiamo ottenere

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)=(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=$$
$$=(x+y)\left[x^2-xy+y^2\right]$$

Ora che abbiamo mostrato la regole per scomporre differenze e somme di cubi, applichiamole direttamente con qualche esempio:

c) $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3=(2x+3y)\left[4x^2-6xy+9y^2\right]$

d) $\dfrac{64}{125}x^3+1=\left(\dfrac{4}{5}x\right)^3+1^3=\left(\dfrac{4}{5}x+1\right)\left[\dfrac{16}{25}x^2-\dfrac{4}{5}x+1\right]$

e) $\dfrac{1}{8}x^6-1=\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^3-1^3=\left(\dfrac{1}{2}x^2-1\right)\left[\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+1\right]$

Il termine finale riportato tra parentesi quadre negli esempi riportati è detto falso quadrato. Notate infatti la presenza dei quadrati dei termini e del loro semplice (non doppio) prodotto cambiato di segno.

1g) (M.C.D) e (m.c.m.) di polinomi

Calcolare il M.C.D e il m.c.m. dei seguenti quattro polinomi:

a) x^2-1 , x^3-1 , x^2-2x+1 , $2x^2-2x$

Procediamo alla loro scomposizione

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

$2x^2-2x=2x(x-1)$

M.C.D: $(x-1)$

m.c.m.: $2x(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)$

(Chi ha dubbi rilegga con attenzione le definizioni di M.C.D e m.c.m. fornite in precedenza)

1h) Frazioni a termini letterali

- **Semplificazione delle frazioni a termini letterali**

Vediamo direttamente degli esempi:

a) $\dfrac{3x^3+x^2+x}{x^2}=\dfrac{\cancel{x}(3x^2+x+1)}{\cancel{x}\cdot x}=\dfrac{3x^2+x+1}{x}$

b) $\dfrac{3x^2+6x+3}{x^2-1}=\dfrac{3(x^2+2x+1)}{x^2-1}=\dfrac{3(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=3\dfrac{x+1}{(x-1)}$

c) $\dfrac{18(x^3-1)(x^2-1)(x-1)}{4(x-1)^4}=\dfrac{9}{2}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)(x-1)(x+1)(x-1)}{(x-1)^4}=$

$$=\frac{9}{2}\frac{(x-1)^3(x^2+x+1)(x+1)}{(x-1)^4}=\frac{9}{2}\frac{(x^2+x+1)(x+1)}{(x-1)}$$

1i) Operazioni con le frazioni a termini letterali

- *ADDIZIONE*

Si consideri l'esempio seguente:

a) $\dfrac{x-y}{x^2+xy}+\dfrac{x+y}{xy-y^2}-\dfrac{3x-y}{x^2-y^2}=$

Per potere svolgere la somma è necessario ridurre le frazioni allo stesso denominatore comune (preferibilmente l'm.c.m.). Per fare questo è necessario prima scomporre in fattori il denominatore delle singole frazioni:

$$=\frac{x-y}{x(x+y)}+\frac{x+y}{y(x-y)}-\frac{3x-y}{(x+y)(x-y)}=$$

L'm.c.m. è perciò $xy(x+y)(x-y)$

Ora possiamo ridurre le frazioni sopra a questo unico denominatore e ricondurci ad una unica frazione nel modo che segue:

$$=\frac{(x-y)y(x-y)+(x+y)x(x+y)-(3x-y)xy}{xy(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{y(x-y)^2+x(x+y)^2-(3x-y)xy}{xy(x+y)(x-y)}=$$

A questo punto dobbiamo svolgere le operazioni indicate a numeratore

$$=\frac{x^2y-2xy^2+y^3+x^3+2x^2y+xy^2-3x^2y+xy^2}{xy(x+y)(x-y)}=$$

Riduciamo ora gli eventuali termini simili a numeratore

$$=\frac{x^3+y^3}{xy(x+y)(x-y)}=$$

Notiamo che il numeratore può essere scomposto e che si può procedere ad una semplificazione

$$=\frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{xy(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy(x-y)}$$

Si consideri infine il seguente esempio:

b) $\dfrac{x-y}{x^2-2xy+y^2}+\dfrac{x+y}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{2y}{x^2-y^2}=$

In questo caso alcune delle frazioni si possono semplificare e quindi conviene procedere preliminarmente alle opportune semplificazioni

$$=\frac{x-y}{(x-y)^2}+\frac{x+y}{(x+y)^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{1}{(x-y)}+\frac{1}{(x+y)}-\frac{2y}{(x-y)(x+y)}=$$

Ora procediamo come nell'esempio precedente

Il m.c.m. è $(x-y)(x+y)$ e perciò possiamo scrivere

$$=\frac{x+y+x-y-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{2x-2y}{(x-y)(x+y)}=\frac{2(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{2}{(x+y)}$$

- *MOLTIPLICAZIONE*

Eseguire la seguente moltiplicazione:

a) $\frac{x^2-2xy}{3x+6y}\cdot\frac{x^2+4xy+4y^2}{2x^2y-4xy^2}=$

Scomponiamo se possibile i numeratori ed i denominatori e semplifichiamo

$$\frac{x(x-2y)}{3(x+2y)}\cdot\frac{(x+2y)^2}{2xy(x-2y)}=\frac{x(x+2y)^2(x-2y)}{6xy(x+2y)(x-2y)}=\frac{x+2y}{6y}$$

Il prossimo esempio non dovrebbe ormai avere bisogno di nessun commento

b) $\frac{24x^2-24xy}{8xy+8y^2}\cdot\frac{7y^3+7xy^2}{21x^4-21x^3y}=\frac{24x(x-y)}{8y(x+y)}\cdot\frac{7y^2(y+x)}{21x^3(x-y)}=\frac{y}{x^2}$

- *DIVISIONE*

Per dividere una frazione per un'altra DIVERSA DA 0 occorre moltiplicare la prima per l'inversa della seconda.

Esempi:

a) $\frac{(4x^2-4x+1)^3}{x+2}:\frac{8x^2-8x+2}{x^2-4}=\frac{(4x^2-4x+1)^3}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{8x^2-8x+2}=$

$$=\frac{\left[(2x-1)^2\right]^3}{x+2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{2(2x-1)^2}=\frac{(2x-1)^6(x-2)}{2(2x-1)^2}=\frac{(2x-1)^4(x-2)}{2}$$

b) $\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{x^2-4y^2}:\frac{x+y+z}{x+2y}=\frac{x^2+y^2+2xy-z^2}{x^2-4y^2}\cdot\frac{x+2y}{x+y+z}=$

$$=\frac{(x+y)^2-z^2}{(x-2y)(x+2y)}\cdot\frac{x+2y}{x+y+z}=\frac{(x+y)^2-z^2}{(x+y+z)(x-2y)}$$

Non abbiamo ancora finito. Anche il numeratore è un prodotto notevole. E' la differenza tra due quadrati e possiamo quindi scomporlo. Faccio tutti i passaggi per chiarezza

$$=\frac{[(x+y)+z][(x+y)-z]}{(x+y+z)(x-2y)}=\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{(x+y+z)(x-2y)}=\frac{x+y-z}{x-2y}$$

Capitolo 2: Equazioni e disequazioni algebriche

2a) Generalità sulle equazioni: cenni

Definizioni:

- Si chiama identità un'uguaglianza tra due funzioni che è sempre soddisfatta qualunque siano i valori attribuiti alle variabili che vi compaiono, eventualmente esclusi quelli per i quali almeno una delle funzioni perde significato.
- Si chiama equazione un'uguaglianza tra due funzioni è soddisfatta solo da particolari valori attribuiti alle variabili che vi compaiono.

Le variabili di una equazione sono dette *incognite*, mentre i valori che attribuiti alle incognite la soddisfano sono dette *radici* o *soluzioni*.

Esempi di identità:

a) $x+7x=8x$

b) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

Si tratta di identità poiché le uguaglianze appena riportate sono sempre verificate, qualsiasi sia il valore numerico assegnato alla *x*.

Esempi di equazioni:

a) $x-3=1$

b) $(x-1)^2=0$

Si tratta di due equazioni. La prima è di primo grado ed è una equazione in quanto risulta soddisfatta solo per $x=4$. La seconda è una equazione di secondo grado che è verificata solo per $x=1$.

Soluzioni di una equazione.

Possono presentarsi diversi casi:

- presenta un numero finito di soluzioni (l'equazione si dice *determinata*)
- non ammette nessuna soluzione (l'equazione si dice *impossibile*)
- presenta infinite soluzioni (non necessariamente si tratta di una identità. Un'equazione che ammette infinite soluzioni senza essere una identità è detta *indeterminata*)

I principi di equivalenza (importante)

Due equazioni si dicono equivalenti se l'insieme delle soluzioni dell'una coincide con quelle dell'altra. CONSEGUENZA: se si vuole risolvere un'equazione si può risolvere una qualsiasi altra ad essa equivalente.

A) Primo principio o principio di addizione:

aggiungendo ai due membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione nell'incognita x, che abbia significato qualunque sia x, si ottiene una equazione equivalente alla data.

Esempio:

Data l'equazione

$3x+1=2x-3$

è equivalente ad essa per esempio la seguente

$3x+1-2x-1=2x-3-2x-1$

che si risolve immediatamente

$x=-4$

B) Principio che scaturisce dal primo *(fondamentale)* :

in una equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro purchè venga cambiato il segno.

Ne consegue che se nei due membri di una equazione compaiono termini uguali questi possono essere soppressi.

Esempio:

$3x+2x+1=2x+2$

$3x+1=2$

Facendo un passaggio in più avremmo ottenuto lo stesso risultato (vedi principio B prima parte):

$3x+2x+1=2x+2$

$3x+2x-2x+1=2$

$3x+1=2$

Possiamo fare due passaggi ulteriori

$3x=2-1$

$3x=1$

Per risolvere questa equazione abbiamo bisogno di un ulteriore principio:

C) Secondo principio di equivalenza o principio di moltiplicazione e divisione:

moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero o una stessa espressione nell'incognita x, che abbia significato qualunque sia x e che non si annulli mai, si ottiene una equazione equivalente alla data.

Riprendiamo l'esempio da dove eravamo rimasti:

$3x = 1$

Dividendo per 3 (o in termini equivalenti moltiplicando per 1/3) entrambi i membri otteniamo

$x = \frac{1}{3}$.

Due conseguenze importanti scaturiscono da quello appena enunciato:

- cambiando i segni di tutti i termini di una equazione si ottiene una equazione equivalente alla data;
- da un a equazione avente coefficienti numerici frazionari si può passare ad una equivalente avente coefficienti interi, moltiplicandone primo e secondo membro per il m.c.m. dei denominatori.

Vediamo due esempi:

a) $3x + 1 = 2x - 3$ moltiplico per (-1) tutti i termini di entrambi i membri ed ottengo

$-3x - 1 = -2x + 3$ equivalente a quella sopra

b) $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{3}$ Il m.c.m. è 6

$\frac{3x+6}{6} = \frac{2}{6}$

$3x + 6 = 2$

Risolviamola per esercizio

$3x = 2 - 6$

$3x = -4$

Risultato: $x = -\frac{4}{3}$

2b) Equazioni di primo grado

Applicando opportunamente i principi di equivalenza, un'equazione intera di primo grado ad una incognita può essere ridotta alla forma normale:

$ax = b$ (a e b sono delle costanti)

Possono presentarsi tre casi:

a) Se $a \neq 0$ allora l'unica soluzione è $x = \frac{b}{a}$ (l'equazione è *determinata*)

b) Se $a = 0$ e $b \neq 0$ non ci sono soluzioni. Non esiste valore di x che moltiplicato per 0 dia un numero $b \neq 0$ (l'equazione è impossibile).

c) Se $a = 0$ e $b = 0$ si ha $0x = 0$. Ogni $x \in R$ è radice dell'equazione (l'equazione è una identità).

Facciamo ora qualche esercizio per mettere in pratica quello che abbiamo imparato.

A) $3x + 8 = 9 - x + 3x$

$8 = 9 - x$

$x = 9 - 8$

Risultato: $x = 1$

B) $5(x-2) - 2(x-5) = 2x - (10 + 3x)$

$5x - 10 - 2x + 10 - 2x + 10 + 3x = 0$

$4x - 10 = 0$

$4x = -10$

Risultato: $x = -\frac{5}{2}$

C) $3x - 5 = 5x - (2x + 1)$

$3x - 5 = 5x - 2x - 1$

$3x - 5 = 3x - 1$

$-5 = -1 \qquad (-5 \neq -1)$ sempre

Risultato: Impossibile

D) $3x + 3 = 3(x + 1)$

$3x + 3 = 3x + 3$

$0 = 0$

Risultato: Identità

E) $\frac{x+7}{2} - \frac{7-x}{7} = \frac{x-7}{2} + 7$

$$\frac{7(x+7) - 2(x-7)}{14} = \frac{7(x-7) + 14 \cdot 7}{14}$$

$7(x+7) - 2(x-7) = 7(x-7) + 14 \cdot 7$

$7x + 49 - 2x + 14 = 7x - 49 + 98$

$-2x+14=0$

$-2x=-14$

$2x=14$

Risultato: $x=7$

2c) Disequazioni e loro proprietà: cenni

Dati due numeri reali a e b tra loro diversi si verifica sempre una delle seguenti condizioni:

- se $a-b>0$ allora $a>b$
- se $a-b<0$ allora $a<b$

Ciascuna delle precedenti espressioni è detta *disuguaglianza*.

Le seguenti espressioni $3x-3>x^2-1$ o $x-3<1$ sono due esempi di disequazioni, poiché bisogna trovare i valori (cioè la soluzione) da attribuire all'incognita x tali da verificarle.

Due disequazioni si dicono **equivalenti** se ammettono le stesse soluzioni.

Due principi fondamentali sono i seguenti:

A) aggiungendo ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione contente l'incognita si ottiene una disequazione equivalente. Questa proprietà permette di spostare un termine da un membro all'altro della disequazione cambiandolo di segno

B) moltiplicando entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero positivo si ottiene una disequazione equivalente, mentre moltiplicandoli per uno stesso numero negativo si ottiene una disequazione equivalente di verso opposto. Questa proprietà permette di cambiare il segno a tutti i termini di una disequazione cambiandone il verso.

Vediamo tre esempi derivanti dall'applicazione di questi principi basilari:

a) $2x-3<x+1$ è per esempio equivalente $2x-x-1-3<x+1-x-1$ che si riduce a $x-4<0$

La cui soluzione è $x<4$

b) $\frac{1}{3}x\geq 2$ è equivalente alla seguente ottenuta moltiplicando per 3 entrambi i membri $x\geq 6$

c) $1-2x<-2$ è equivalente alla seguente ottenuta moltiplicando per -1 entrambi i membri $2x-1>2$

2d) Disequazioni di primo grado

Le disequazioni di primo grado possono essere sempre ridotte alla forma normale:

$ax+b>0$ o $ax+b<0$

(Possiamo sempre evidentemente supporre che $a>0$. Se fosse il contrario infatti basterebbe moltiplicare tutto per –1 e cambiare il verso.)

Per la proprietà A) le due disequazioni sono equivalenti alle seguenti:

$ax>-b$ e $ax<-b$

Per la proprietà B) le due disequazioni sono equivalenti alle seguenti:

$x>-\frac{b}{a}$ e $x<-\frac{b}{a}$

Vediamo alcuni semplici esempi:

a) $3x+5>2x+6$

$3x-2x>6-5$

Risultato: $x>1$

b) $(x+1)^2-5(x-1)>x(x+2)$

$x^2+2x+1-5x+5>x^2+2x$

$-5x+6>0$

$-5x>-6$

$5x<6$

Risultato: $x<\frac{6}{5}$

c) $\frac{x^2-x}{2}+\frac{1}{3}\geq\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}$

$-\frac{x}{2}\geq-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$

$-\frac{x}{2}\geq-\frac{2}{3}$

$\frac{x}{2}\leq\frac{2}{3}$

Risultato: $x\leq\frac{4}{3}$

2e) Equazioni di secondo grado

Ogni equazione di secondo grado può essere sempre ricondotta alla sua forma tipica:

$ax^2+bx+c=0$ dove $a,b,c\in R$ con $a\neq0$.

La formula risolutiva generale di una equazione di 2° è la seguente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Questa formula si può sempre applicare anche nelle equazioni in cui mancano i termini b, e/o $c \in R$ con $a \neq 0$. Anche se in questi casi esistono metodi più rapidi.

Per esempio se solo $c = 0$ l'equazione diventa:

$ax^2 + bx = 0$ che può essere riscritta così $x(ax + b) = 0$. Per risolvere questa equazione si può applicare la legge di *annullamento del prodotto* che consiste nel porre uguale a zero i singoli fattori e risolvere rispetto ad x:

$x = 0$ e $ax + b = 0$. Le soluzioni sono pertanto ($x = 0$ e $x = -b/a$). Come detto si potrebbe applicare comunque la formula risolutiva generale ponendo $c = 0$:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a}$ che ha appunto come soluzioni ($x = 0$ e $x = -b/a$).

Per esempio se solo $b = 0$ l'equazione diventa:

$ax^2 + c = 0$. Possiamo poi scrivere $x^2 = -\frac{c}{a}$ che ammette due soluzioni reali solo se i segni dei coefficienti a, e c sono discordi. In questo caso le soluzioni sono $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Se i segni sono concordi l'equazione è impossibile in *R*.

Sostituendo $b = 0$ nella formula risolutiva generale si ottengono ovviamente le medesime conclusioni:

$$x = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Riprendiamo la formula risolutiva generale ed esaminiamola:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>*Distinguiamo tre casi in base al segno del discriminate (o delta):*</u>

- $b^2 - 4ac > 0$ l'equazione ha due radici reali e distinte
- $b^2 - 4ac = 0$ l'equazione ha due radici reali e coincidenti
- $b^2 - 4ac < 0$ l'equazione non ha radici reali

Vediamo alcuni esempi

a) $3x^2 + 6x = 0$

$3x(x + 2) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto le soluzioni sono ($x = 0$ e $x = -2$).

b) $x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

Le soluzioni sono $x = \pm\sqrt{2}$

c) $3x^2 + 2 = 0$

Come è facile notare il membro di sinistra è sempre strettamente positivo, non ci sono perciò radici reali. Si noti inoltre che il segno del coefficiente di x^2 e quello del termine noto sono concordi e come avevamo detto prima (mancando *b*) questo implica l'assenza di radici reali.

d) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Le soluzioni sono ($x = 2$ e $x = -1/3$).

e) $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1$$

Le soluzioni reali in questo caso sono due ma coincidenti poiché il delta è nullo.

f) $5x^2 - 3x + 1 = 0$

Il delta è 9-20=-11. Essendo il delta negativo non ci sono radici reali

2f) Disequazioni di secondo grado

Le disequazioni di secondo grado in una sola incognita sono sempre riconducibili alla forma tipica:

$ax^2 + bx + c > 0$ oppure $ax^2 + bx + c < 0$ con $a \neq 0$.

Consideriamo i diversi casi possibili quando $a > 0$ senza perdita di generalità. Quando $a < 0$, moltiplicando entrambi i membri per -1 e cambiando il verso otteniamo infatti un disequazione equivalente.

<u>A) Delta positivo</u>

Indichiamo con x_1 e x_2 (con $x_1 < x_2$) le radici di $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c > 0$ è verificata per valori esterni alle radici $x < x_1$ e $x > x_2$

$ax^2 + bx + c < 0$ è verificata per valori interni $x_1 < x < x_2$

Si noti che in entrambi i casi le radici sono escluse (sarebbero incluse se i versi delle disequazioni fossero $\geq$ e $\leq$).

<u>B) Delta nullo</u>

Indichiamo con x_1 l'unica radice di $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c > 0$ è verificata per ogni $x \in R$ con $x \neq x_1$

$ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata

$ax^2 + bx + c \geq 0$ è verificata per ogni $x \in R$

$ax^2 + bx + c \leq 0$ è verificata solo per $x = x_1$

<u>C) Delta negativo</u>

$ax^2 + bx + c > 0$ è verificata per ogni $x \in R$

$ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata

Ulteriori chiarimenti ed un modo più semplice per risolvere disequazioni di 2° verrà fornito quando verrà discussa la funzione parabola.

Applichiamo comunque le regole appena esposte con alcuni esempi:

a) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

Le soluzioni dell'equazione associata sono (-3; 1/2)

La disequazione è verificata per valori esterni alle radici e cioè $x < -3$ e $x > 1/2$

b) $-x^2 + 4x + 4 > 0$. Adesso $a = -1 < 0$. Nessun problema moltiplichiamo per -1 e cambiamo verso:

$$x^2 - 4x - 4 < 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono ($2 - \sqrt{2}\,; 2 + \sqrt{2}$)

La disequazione è verificata per valori interni alle radici e cioè $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$

c) $x^2 - 4x + 4 > 0$

Il delta è nullo e l'equazione associata ha come soluzione 2.

La disequazione è verificata per $x \in R - \{2\}$

d) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$

E' un quadrato, il delta allora è nullo. La soluzione dell'equazione associata è –1/3.

La disequazione è verificata solo per $x = -1/3$

e) $3x^2 + x + 4 < 0$

Il delta è negativo (-47). La disequazione non è mai verificata.

f) $x^2 - x + 2 > 0$

Il delta è negativo (-7). La disequazione è verificata per ogni $x \in R$.

2g) Equazioni razionali

Considereremo due casi: equazioni razionali fratte ed equazioni di grado superiore al secondo.

Le equazioni **razionali fratte** sono riconducibili alla forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

essendo numeratore e denominatore due polinomi nell'incognita *x*. Il grado del denominatore deve essere maggiore o uguale ad uno. Dalle soluzioni ottenute, dovranno poi essere eliminate, qualora siano presenti, quei valori di *x* che azzerano il denominatore.

Chiariamo il tutto con dei semplici esempi:

a) $\frac{x^2 - 1}{(x+1)^2} = 0$

Per prima cosa dobbiamo richiedere che il denominatore sia diverso da 0 e cioè':

$(x+1)^2 \neq 0$, il che implica $x \neq -1$.

Con questa condizione (cioè $x \neq -1$) possiamo moltiplicare entrambi i per $(x+1)^2$ ottenendo:

$x^2 - 1 = 0$

Le soluzioni sono apparentemente due (-1;1). In realtà la radice $x = -1$ deve essere esclusa in quanto in precedenza abbiamo detto che $x \neq -1$.

Risultato: $x = 1$

b) $\frac{x+3}{x^2 - 9} = 0$

Per prima cosa dobbiamo richiedere che il denominatore sia diverso da 0 e cioè':

$x^2 - 9 \neq 0$, il che implica $x \neq \pm 3$.

Con questa condizione (cioè $x \neq \pm 3$) possiamo moltiplicare entrambi i per $x^2 - 9 \neq 0$ ottenendo:

$x + 3 = 0$

Le soluzione è apparentemente $x = -3$. In realtà tale radice $x = -3$ deve essere non è accettabile.

Risultato: nessuna soluzione.

c) $\frac{x+3}{x^2 + 9} = 0$

Il denominatore è sempre strettamente positivo e quindi non esiste valore dell'incognita che lo azzeri.

Possiamo perciò moltiplicare tranquillamente entrambi i membri per il denominatore del primo membro ottenendo:

$$x+3=0$$

Risultato: $x=-3$

d) $\dfrac{x+3}{x+5}=3$

$$\frac{x+3}{x+5}=\frac{3(x+5)}{x+5}$$

Ponendo $x\neq -5$ possiamo eliminare il denominatore

$$x+3-3(x+5)=0$$

$$x+3-3x-15=0$$

Risultato: $x=-6$

Le equazioni **razionali di grado superiore al secondo** sono riconducibili alla forma:

$f(x)=0$.

L'idea alla base del procedimento risolutivo è quello di scomporre l'equazione di grado superiore al secondo nel prodotto di termini di primo e/o secondo grado e nell'uguagliare a zero i singoli fattori così ottenuti. In altre parole due passaggi fondamentali sono necessari:

- il primo è la scomposizione del polinomio in fattori di primo e/ o secondo grado
- il secondo è applicare il principio di annullamento del prodotto.

Prenderemo in considerazione polinomi che si scompongono semplicemente utilizzando uno dei metodi visti nella parte sul calcolo letterale (metodi basati sul raccoglimento a fattor comune, metodi basate sui prodotti notevoli. Non considereremo metodi più complessi come quelli basati sulla divisione (normale) o alla Ruffini).

Vediamo ora qualche semplice esempio:

a) $x(x+7)(x-2)=0$

Questo esempio è semplicissimo in quanto il primo dei due passaggi necessari (il più difficile) è già stato svolto. Siamo in presenza di un polinomio di terzo grado già fattorizzato.

Basta applicare direttamente la legge di annullamento del prodotto ponendo uguali a zero i tre fattori cioè $x=0$ $x+7=0$ $x-2=0$. In pratica dobbiamo risolvere 3 equazioni di primo grado.

Risultato: (0; -7; 2).

b) $4x^4 - 1 = 0$

Siamo in presenza di una equazione di quarto grado. Notiamo che si tratta di un prodotto notevole.

$$\left(2x^2+1\right)\left(2x^2-1\right)=0$$

$$\left(2x^2+1\right)\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(\sqrt{2}x+1\right)=0$$

Il primo fattore è sempre strettamente positivo cioè non si annulla mai. Pertanto le soluzioni si ottengono ponendo uguale a zero il secondo ed il terzo fattore.

Risultato: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Chiaramente in questo caso c'era un'altra via più rapida:

$x^4 = \frac{1}{4}$ da cui segue $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2^2}} = \pm\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{4}} = \pm\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $x^3 + 2x^2 + x = 0$

$$x\left(x^2+2x+1\right)=0$$

$$x(x+1)^2 = 0$$

Risultato: (0; -1)

2h) Disequazioni razionali

Le disequazioni **razionali fratte** sono riconducibili alla forma:

$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ oppure $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$

essendo numeratore e denominatore due polinomi nell'incognita *x*. Il grado del denominatore deve essere maggiore o uguale ad uno. Per studiare il segno del rapporto è necessario stabilire il segno del numeratore e del denominatore.

Chiaramente $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ sarà soddisfatta per quei valori dell'incognita per i quali il segno del numeratore e del denominatore sono concordi. Mentre la disequazione $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ sarà soddisfatta per quei valori di *x* per i quali numeratore e denominatore hanno segno discorde.

Esempi:

a) $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$ (il tratto----- negativo, il tratto ++++ indica positivo) C.E. $x \neq 1$

Segno $x+1$ -------------(-1)++++++++++++++++

Segno $x-1$ ----------------------------(1)++++++++

Segno $\frac{x+1}{x-1}$ ++++++++(-1)----------(1)++++++++

La disequazione è soddisfatta per $-1 \leq x < 1$

b) $\frac{3x-2}{9-x^2} \geq 0$

Segno $3x-2$ ----------------------(2/3)++++++++++++++++

Segno $9-x^2$ -------(-3)++++++++++++++(3)----------------

Segno $\frac{3x-2}{9-x^2}$ ++++(-3)-----------(2/3)++++(3)----------------

La disequazione è soddisfatta per $x < -3$ e per $2/3 \leq x < 3$. I valori –3 e 3 devono essere esclusi in quanto annullano il denominatore.

c) $\frac{x^2+25}{x^2-4x} \leq 0$ CE: $x^2-4x \neq 0 \rightarrow x \neq 0$ e $x \neq 4$

Segno x^2+25 +++++++++++++++++++++++++++++++++

Segno x^2-4x +++++++++(0)---------------(4)+++++++++++

Segno $\frac{x^2+25}{x^2-4x}$ +++++++++(0)----------------(4)++++++++++

La disequazione ha soluzione $0 < x < 4$ e non $0 \leq x \leq 4$ poiché i valori 0 e 4 azzerano il denominatore e devono essere pertanto esclusi.

Le disequazioni **razionali di grado superiore al secondo** sono riconducibili alla forma:

$f(x) > 0$ oppure $f(x) < 0$

dove $f(x)$ è un polinomio che sappiamo trasformare nel prodotto di termini di primo e secondo grado.

Esempi:

a) $x^3+2x^2+x \leq 0$

$x(x^2+2x+1) \leq 0$

$x(x+1)^2 \leq 0$

Segno $(x+1)^2$ ++++++++++(-1)+++++++++++++++++++++

Segno x -----------------------------(0)+++++++++++++++

Segno $x(x+1)^2$ ----------------(-1)---------(0)+++++++++++++++

La disequazione è verificata $x \leq 0$.

b) $x(x+1)^2 < 0$

Segno $(x+1)^2$ ++++++++++(-1)+++++++++++++++++++++

Segno x -----------------------------(0)+++++++++++++++

Segno $x(x+1)^2$ ----------------(-1)---------(0)+++++++++++++++

La disequazione è verificata per $x < -1$ e $-1 < x < 0$. Rispetto al caso precedente i valori -1 e 0 non soddisfano la disequazione. Ora eravamo infatti interessati a quei valori di x che la rendono la b) strettamente negativa.

c) $(x+1)(x+2)(x-1) \geq 0$

$(x^2-1)(2-x) \geq 0$

Segno (x^2-1) ++++++++++(-1)--------------(1)++++++++++++++++++

Segno $(2-x)$ +++++++++++++++++++++++++++++++++(2)----------

Segno $(x^2-1)(2-x)$ ++++++++++(-1)--------------(1)++++++++++(2)----------

La disequazione è verificata per $x \leq -1$ e per $1 \leq x \leq 2$.

2i) Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni è costituito da un insieme di disequazioni che devono essere soddisfatte contemporaneamente.

Risolvere un sistema di disequazioni significa determinare le soluzioni comuni a tutte le disequazioni che lo costituiscono. Un sistema che non ammette soluzioni comuni si dice *impossibile.*

Risolviamo per esempio il seguente sistema costituito da due equazioni

a) $\begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ x^2-4 < 0 \end{cases}$

- Il primo passo consiste nel risolvere ciascuna disequazione separatamente

- Il secondo ed ultimo passo consiste nel confrontare le soluzioni delle diverse disequazioni per vedere se ci sono valori comuni a tutte le disequazioni del sistema. Se ve ne sono, queste sono le soluzioni.

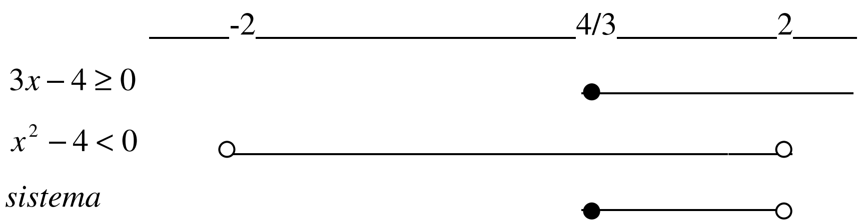
Procediamo con il primo punto:

La prima disequazione è chiaramente verificata per $x \geq 4/3$.

La seconda è verificata per $-2 < x < 2$.

Apro una parentesi: chi non capisce da dove vengano i risultati precedenti farà bene a ripassare bene quanto fatto precedente e a provare a fare gli esercizi sulle disequazioni di primo e secondo grado riportate nell'eserciziario.

Procediamo con il secondo punto, cioè mettiamo in un unico diagramma le soluzione delle due equazioni e vediamo se ci sono tratti in comune:



Il tratto continuo in corrispondenza di ciascuna disequazione rappresenta quello in corrispondenza del quale ciascuna disequazione è verificata. Il pallino pieno indica che quel valore fa parte della soluzione, mentre quelli vuoti no.

Ci sono tratti comuni cioè che si sovrappongono? Sì.

Le soluzioni del sistema sono date dai valori che si trovano su quel tratto. Risultato: $4/3 \leq x < 2$.

Perché il valore 2 è escluso? Datevi una risposta, altrimenti chiedete!

Il prossimo esempio è piuttosto lungo (e mai vi verrà dato nel compito) però può essere abbastanza istruttivo perché c'è un po' di tutto.

b) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-2} \leq 0 \\ x^4 - x^2 \geq 0 \\ 2x^3(x-4) < 0 \end{cases}$

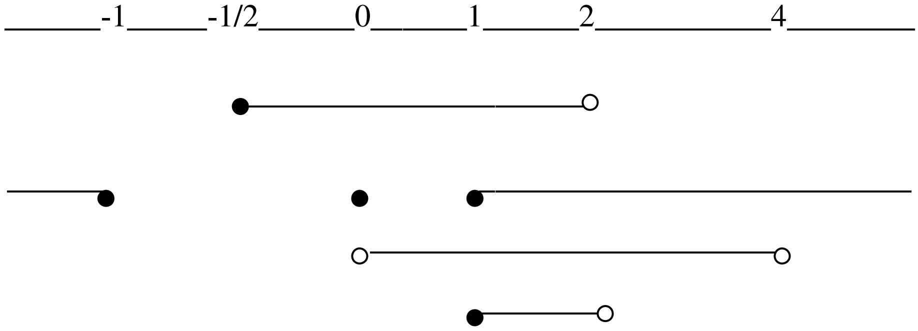
La prima è verificata per $-1/2 \leq x < 2$

La seconda è verificata per $x \leq -1$, per $x = 0$, per $x \geq 1$

La terza per $0 < x < 4$

Se vi va verificate se la correttezza di quanto appena affermato. Avete tutti gli strumenti per farlo. Se avete comunque dubbi chiedete!

Mettiamo in un unico diagramma le soluzioni delle tre disequazioni e vediamo se ci sono tratti in comune:



$\frac{2x+1}{x-2} \le 0$

$x^4 - x^2 \ge 0$

$2x^3(x-4) < 0$

sistema

Risultato: $1 \le x < 2$

2l) Equazioni irrazionali

Un'equazione si dice irrazionale se l'incognita compare sotto il segno di radice.

Consideriamo equazioni del tipo

$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ con *n* intero e maggiore o uguale a due.

Il metodo che verrà esposto potrà essere usato anche in casi più complessi. Vi voglio sin d'ora rassicurare che nel compito vi assegnerò casi molto semplici (anche se il metodo ve lo descrivo anche per i casi più complessi).

Bisogna distinguere due casi (il primo dei quali molto più semplice) a seconda che *n* sia dispari o pari.

1) Caso: <u>*n dispari*</u>

Se *n* è dispari il metodo risolutivo è banale: occorre semplicemente elevare alla *n* entrambi i membri e l'equazione diviene razionale. In termini matematici:

$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ è equivalente a $f(x) = [g(x)]^n$

Vediamo ora due casi semplicissimi (più difficili non vi saranno dati):

a) $\sqrt[3]{x^3 - 1} = x + 1$

Eleviamo alla terza entrambi i membri:

$$x^3 - 1 = (x+1)^3$$

$$x^3 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$3x^2 + 3x + 2 = 0$$

Notiamo che il delta è negativo.

Risultato: non ci sono radi reali

Vediamo ora un caso un po' diverso ma che si risolve allo stesso modo.

b) $\sqrt[7]{x^2 - x} = \sqrt[7]{x-1}$

Eleviamo alla settima entrambi i membri:

$$x^2 - x = x - 1$$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ (a questo punto potevate utilizzare anche la formula risolutiva generale)

$$(x-1)^2 = 0$$

Risultato: $x = 1$

2) Caso: <u>*n pari (più difficile)*</u>

Se *n* è pari ci sono delle condizioni da imporre per risolvere l'equazione:

$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.

Ora le enuncio:

- la condizione di realtà del radicale
- la condizione di concordanza di segno tra i due membri
- la condizione ottenuta elevando alla potenza n-esima entrambi i membri.

In simboli, se *n* è pari, l'equazione $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ è equivalente al sistema:

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$ che si riduce al seguente $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$ dato che la condizione $f(x) \geq 0$ è implicita nella seconda equazione.

Esempi.

a) $\sqrt{x+1} = 2x - 1$

L'equazione è equivalente al sistema seguente:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x + 1 = (2x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ 4x^2 - 5x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ x(4x-5) = 0 \end{cases}$$

L'equazione nel sistema ha due soluzioni $x = 0$ e $x = 5/4$.

Tuttavia solo la seconda è radice dell'equazione irrazionale, perché deve essere $x \geq 1/2$. Provate a sostituire nell'equazione irrazionale prima il valore 0 e poi il valore 5/4. Cosa notate?

Risultato: $x = 5/4$

b) $\sqrt[4]{x^2 - x} = \sqrt[4]{x-1}$

In questo caso il sistema è

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x = x - 1 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta per $x \leq 0$ e per $x \geq 1$

La seconda disequazione è soddisfatta per $x \geq 1$

Poiché entrambe le condizioni di realtà devono essere soddisfatte e ciò accade per $x \geq 1$ possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione nel sistema ha come risultato $x = 1$ e non contraddice la condizione $x \geq 1$.

Risultato: $x = 1$

2m) Disequazioni irrazionali

Una disequazione si dice irrazionale se l'incognita compare sotto il segno di radice.

Consideriamo disequazioni del tipo

$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ oppure $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ (con *n* intero e maggiore o uguale a due).

Il metodo che verrà esposto potrà essere usato anche in casi più complessi. Bisogna distinguere due casi a seconda che *n* sia dispari o pari.

1) Caso: <u>*n dispari*</u>

Se *n* è dispari il metodo risolutivo è banale: occorre semplicemente elevare alla *n* entrambi i membri ottenendo una disequazione equivalente ed equiversa. In termini matematici:

$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ è equivalente a $f(x) > [g(x)]^n$

$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ è equivalente a $f(x) < [g(x)]^n$.

Vediamo un esempio:

a) $\sqrt[3]{x^3-3x+1} \leq x-2$

Elevando al cubo si ottiene:

$x^3-3x+1 \leq x^3-6x^2+12x-8$

$6x^2-15x+9 \leq 0$

$2x^2-5x+3 \leq 0$

La disequazione è verificata per $1 \leq x \leq 3/2$

Risultato: $1 \leq x \leq 3/2$

2) Caso: *n pari*

In questo caso le cose si complicano un poco.

Bisogna distinguere due sottocasi.

2a) $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$

Questa disequazione equivale al sistema seguente:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$$

La prima condizione esprime la condizione di realtà del primo membro.

La seconda è necessaria affinché la disequazione sia verificata. Se $g(x) < 0$ la disequazione non ha alcun senso, essendo il primo membro non negativo. Sotto queste condizioni si può elevare alla *n*. Ecco così spiegato il sistema precedente.

Vediamo un esempio.

La disequazione seguente

a) $\sqrt{2x+1} < x-1$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ 2x+1 < x^2-2x+1 \end{cases}$$

che si riduce al seguente

$$\begin{cases} x \geq -1/2 \\ x > 1 \\ -x^2+4x < 0 \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto nel modo seguente

$$\begin{cases} x \geq -1/2 \\ x > 1 \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases}$$

Si tratta di risolvere un sistema di tre disequazioni

La prima è verificata per $x \geq -1/2$

La seconda è verificata per $x > 1$

La terza è verificata per $x < 0$ e per $x > 4$

Non sto a fare il grafico, che ci serve per individuare con più facilità il tratto nel quale sono verificate nello stesso tempo tutte e tre le disequazioni. In questo caso risulta abbastanza agevole individuare il risultato.

Risultato: $x > 4$

2b) $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$

Questo è indubbiamente il caso più noioso e non ve lo darò mai. Comunque vale la pena spiegarlo, perché è utile per imparare a ragionare in matematica.

La disequazione $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ è equivalente all'unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$$

Cerchiamo di spiegare da dove derivano.

Partiamo dal primo. Il primo ci dice che, poiché il primo membro è positivo (condizione di realtà), se il secondo membro è negativo, la nostra disequazione irrazionale è senza dubbio soddisfatta (una quantità positiva è sempre maggiore di una negativa). Il secondo sistema prende in considerazione il caso in cui il secondo membro sia non negativo. Sotto queste ipotesi è possibile elevare ambi i membri alla *n.* La condizione di realtà del radicale a primo membro non è riportata perché è implicita nella seconda disequazione che compare nel secondo sistema.

Vediamo un esempio.

a) $\sqrt{4-x} > 3x - 2$

Occorre unire le soluzioni fornite dai due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ 3x - 2 < 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ 3 - x > (3x-2)^2 \end{cases}$$

Risolviamo il primo.

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2/3 \end{cases}$$

Questo sistema è soddisfatto $x < 2/3$. NOTA BENE: QUESTA E' LA PRIMA PARTE DEL RISULTATO.

Risolviamo il secondo:

$$\begin{cases} x \geq 2/3 \\ 4 - x > 9x^2 - 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2/3 \\ -9x^2 + 11x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2/3 \\ 9x^2 - 11x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2/3 \\ 0 < x < 11/9 \end{cases}$$

Il sistema è evidentemente soddisfatto per $2/3 \leq x < 11/9$. NOTA BENE: QUESTA E' LA SECONDA PARTE DEL RISULTATO.

Il risultato deriva dall'***unione*** dei precedenti.

Risultato: $x < 2/3$ e $2/3 \leq x < 11/9$. Questo risultato può essere scritto in forma più compatta. L'unione delle due soluzioni si scrive semplicemente come $x < 11/9$.

2n) Equazioni con valori assoluti

La funzione valore assoluto

Definizione:

La funzione valore assoluto (detta anche modulo) fa corrispondere al numero reale a il numero indicato con la seguente notazione $|a|$ ed è definito come segue

$|a| = a$ se $a \geq 0$ mentre $|a| = -a$ se $a < 0$

In parole povere la funzione valore assoluto trasforma la quantità al proprio interno in una non negativa.

Vediamo due esempi numerici:

a) $|-5| = -(-5) = 5$

b) $|4| = 4$

Vediamo alcune proprietà del valore assoluto di un numero:

1) $|a| = |-a|$

2) $|a| = |b|$ se e solo se $a = b$ o $a = -b$

3) $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$

4) $|a| \cdot |b| = |ab|$

5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ con $b \neq 0$

6) $|a| = \sqrt{a^2}$

7) $|a| \leq |b|$ se e solo se $a^2 \leq b^2$

8) $|a| \leq b$ se e solo se $-b \leq a \leq b$

9) $|a| \geq b$ se e solo se $a \leq -b$ o $a \geq b$

Equazioni con valori assoluti

L'equazione

- $|f(x)| = a$ (se *a* è un numero positivo) ha quelle date dalle equazioni:

  $f(x) = a$ e $f(x) = -a$

- $|f(x)| = a$ (se *a*=0) ha quella data dall'equazione:

  $f(x) = 0$

- $|f(x)| = a$ (se *a* è un numero negativo) non ha soluzioni.

Vediamo dei semplici esempi

a) $|x^2 - 9| = 3$

Occorre risolvere le due seguenti equazioni:

$x^2 - 9 = 3$ e $x^2 - 9 = -3$

dalle quali si ricavano le seguenti:

$x^2 = 12$ e $x^2 = 6$

La prima equazione ha soluzioni $x = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{3 \cdot 2^2} = \pm 2\sqrt{3}$

La seconda equazione ha soluzioni $x = \pm\sqrt{6}$

Le soluzioni dell'equazione a) sono dunque date dalla unione di quelle delle due precedenti equazioni.

Risultato: $x = \pm 2\sqrt{3}$ e $x = \pm\sqrt{6}$

b) $|x^2 - 9| = 0$

In questo caso la soluzione è data dalla seguente equazione

$x^2 - 9 = 0$

Risultato: $x = \pm 3$

c) $|2x-4| = x-2$

Questo caso è leggermente più complesso dei precedenti. Ma non c'è nulla di cui preoccuparsi. Basta avere bene in mente la definizione di valore assoluto.

Applichiamola:

$|2x-4| = 2x-4$ se e solo se $2x-4 \geq 0$ e cioè $x \geq 2$

$|2x-4| = -2x+4$ se e solo se $2x-4 < 0$ e cioè $x < 2$

L'equazione data è perciò equivalente ai due sistemi seguenti

$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x-4 = x-2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x < 2 \\ -2x+4 = x-2 \end{cases}$

che sono equivalenti ai seguenti:

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x < 2 \\ x = 2 \end{cases}$

Risultato: $x = 2$

Ci sono casi ancora più laboriosi, ma non li prenderemo in considerazione. Nel compito gli esercizi non saranno di certo più difficili di quelli visti a lezione.

2o) Disequazioni con valori assoluti

La disequazione

- $|f(x)| < a$ (con a è un numero positivo) è equivalente al sistema:

$\begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases}$ ciò è equivalente a dire $-a < f(x) < a$ (vedi proprietà 8)

La disequazione

- $|f(x)| > a$ (con a è un numero positivo) ha come soluzioni quelle derivanti dall'unione (non dal sistema) delle disequazioni seguenti:

$f(x) > a$ e $f(x) < -a$ (vedi proprietà 9)

Vediamo dei semplici esempi.

a) $|2x+1| < 7$

$-7 < 2x+1 < 7$

$-8 < 2x < 6$

Risultato: $-4 < 2x < 3$

b) $|5 - x^2| > 2$

Le soluzioni si ottengono dall'unione delle soluzioni delle due disequazioni seguenti:

$5 - x^2 > 2$ e $5 - x^2 < -2$

Dopo alcuni calcoli si ottiene

$x^2 < 3$ e $x^2 > 7$

Le loro soluzioni sono rispettivamente:

$(-\sqrt{3} < x < \sqrt{3})$ e $(x < -\sqrt{7}$ e $x > \sqrt{7})$

Dall'unione di queste soluzioni si ottengono quelle della disequazione di partenza.

Risultato: $x < -\sqrt{7}$ e $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e $x > \sqrt{7}$

c) $|x+1| < 3x - 4$

Dato che

$|x+1| = x+1$ se $x+1 \geq 0$ cioè per $x \geq -1$

$|x+1| = -x-1$ se $x+1 < 0$ cioè per $x < -1$

la disequazione c) è equivalente ai due sistemi

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 < 3x-4 \end{cases}$ e $\begin{cases} x < -1 \\ -x-1 < 3x-4 \end{cases}$

Risolvendoli si ottiene

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x > 5/2 \end{cases}$ perciò $x > 5/2$

$\begin{cases} x < -1 \\ x > 3/4 \end{cases}$ impossibile

Risultato: $x > 5/2$

2p) Sistemi di due equazioni lineari in due incognite

Un sistema può essere:

- determinato (avere una sola soluzione)
- indeterminato (avere infinite soluzioni)
- impossibile (non avere soluzioni).

Illustreremo unicamente il *metodo di sostituzione* e lo faremo direttamente tramite alcuni esempi.

a) $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ x+y=5 \end{cases}$

Prendiamo per esempio la prima equazione e la esplicitiamo rispetto alla *x*:

$$\begin{cases} x=2y-4 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Ora sostituiamo al posto di *x* nella seconda equazione l'espressione di *x* ottenuta nella prima:

$$\begin{cases} x=2y-4 \\ 2y-4+y=5 \end{cases}$$

La seconda equazione è diventata una equazione di primo grado nell'incognita *y* e la risolviamo:

$$\begin{cases} x=2y-4 \\ y=3 \end{cases}$$

Ora sostituiamo al posto della *y* nella prima equazione il valore 3 ed otteniamo cosi' la soluzione del sistema. Notate bene che sta a voi scegliere da quale equazione partire e scegliere l'incognita. Qualsiasi scelta sarebbe andata bene ed avrebbe alla fine condotto allo stesso risultato.

Risultato: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+2y+4=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2(x+y+2)=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Questo sistema è chiaramente impossibile. Ci dice infatti che 0=-2. Capiremo meglio il perché questo sistema non ha soluzioni quando studieremo le rette (dal punto di vista grafico le due equazioni riportate sono rette parallele e la soluzione rappresenta il loro punto di intersezione. Ma due rette parallele non hanno punti di intersezione)

c) $\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ 6x+6y+3=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ 3(2x+2y+1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ 2x+2y+1=0 \end{cases}$$

In questo caso abbiamo infinite soluzioni. Dal punto di vista grafico si tratta di due rette coincidenti. Se andate a sostituire troverete una identità 0=0.

d) $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$

Possiamo per esempio isolare la x nella prima equazione:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y-1}{3} \\ 4x+3y=10 \end{cases}$$

Sostituiamo al posto della x nella seconda la sua espressione trovata nella prima:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y-1}{3} \\ 4\left(\dfrac{2y-1}{3}\right)+3y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y-1}{3} \\ \dfrac{8y-4+9y}{3}=\dfrac{30}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y-1}{3} \\ y=2 \end{cases}$$

Sostituiamo il valore 2 al posto della y nella prima equazione ed abbiamo risolto il sistema

Risultato: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-1 \\ y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-1 \\ \dfrac{2}{3}x-1=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-1 \\ \dfrac{4}{6}x-\dfrac{6}{6}=\dfrac{9}{6}x+\dfrac{2}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ -\frac{8}{6} = \frac{5}{6}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ x = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) - 1 \\ x = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Risultato: $\begin{cases} x = -\frac{8}{5} \\ y = -\frac{31}{15} \end{cases}$